

BEACH の物理モデルと数値アルゴリズム

表面帯電・境界要素法・粒子追跡の技術解説

技術原稿（著者・所属は確定時に記入）

2026 年 10 月 13 日

本書の位置づけ

本書は BEACH (BEM + Accumulated CHarge) が採用するモデルとアルゴリズムを、研究背景、支配方程式、離散化、計算手順、適用限界の順にまとめた技術原稿である。想定読者は、プラズマと表面の相互作用を研究し、BEACH による計算を論文で説明する研究者である。入力形式や操作手順は扱わず、プラズマ物理と数値計算の一般的な知識を前提に、物理量がどの近似を経て計算されるかを記述する。

本書は新たな研究成果を報告する論文ではない。第8章の数値例は、手法の性質を示すための試験計算である。性能や実環境との一致を実測したとは主張しない。第9章に、研究ケースごとに必要な検証を示す。文献は理論の由来と比較対象を示すものであり、BEACH 全体を先行論文と同一のモデルと認定するものではない。

概要

BEACH は三角形表面要素に蓄積した電荷から静電場を評価し、荷電テスト粒子の前進軌道と表面への吸収・放出を通じて電荷分布を更新する。各三角形には一定面電荷密度を仮定し、近傍相互作用を解析的な panel 積分、遠方相互作用を直接和、treecode または Cartesian FMM で扱う。粒子は予測中点電場を用いた Boris 速度更新と台形位置更新によって進め、軌道線分上の最初の表面衝突または計算箱境界イベントを処理する。場はバッチ中に固定し、電荷差分をバッチ末尾に確定反映する。通常の絶縁体電荷蓄積に加え、浮遊導体の再配分、光電子の照射 ray による放出、吸収時の二次電子放出、2 軸周期静電場、外部の定常シースの零電流根を上端面に接続する closure が実装されている。外部シースは、太陽風と光電子がつくる平面・無衝突のシースを、軌道に沿って写した速度分布と Poisson 方程式の第一積分で解くモデルである。一方、BEACH 領域内の体積プラズマ空間電荷、誘電分極、表面伝導、外部シースの時間依存輸送は解かない。本書は、このモデル分担と数値誤差の所在を明確にし、研究利用に必要な収束確認と比較検証を整理する。

キーワード：表面帯電、境界要素法、テスト粒子、Boris 法、高速多重極法、光電子、外部シース

Abstract

BEACH evaluates electrostatic fields from charge accumulated on triangular surface elements and updates the charge distribution through forward tracking, absorption, and emission of charged test particles. Its constant-density triangular sources are evaluated using analytic panel integrals for near interactions and direct summation, a treecode, or a Cartesian fast multipole method for field evaluation. Particle positions and velocities are stored at the same time. A predicted midpoint field, Boris velocity rotation, and trapezoidal position update define each candidate step, followed by the first surface or box-boundary event. Fields remain fixed during each batch, and charge increments are committed at its end. Implemented extensions include floating conductors, ray-based photoelectron emission, secondary electron emission on absorption, two-dimensional periodic electrostatics, and a top-face closure that connects the zero-current root of a stationary outer sheath. The outer sheath is a planar, collisionless photoelectron sheath solved from orbit-mapped velocity distributions and the first integral of Poisson's equation. The inner domain does not solve volume plasma space charge, dielectric polarization, surface conduction, or time-dependent outer transport. This technical manuscript documents the model partition, numerical approximations, and verification procedures needed for research use. It reports no newly generated simulation results and makes no claim of general experimental validation or measured performance.

目次

本書の位置づけ	i
概要	ii
1 研究背景と先行研究	1
1.1 表面電位は粒子の到達を変える	1
1.2 月面・無大気天体での動機	1
1.3 シースモデルと三次元局所計算	1
1.4 採用手法の系譜	2
2 モデルの分担と支配方程式	3
2.1 状態量と計算領域	3
2.2 テスト粒子と表面電荷の自己無撞着性	3
2.3 二つの時間刻み	4
2.4 一バッチの結合手順	4
3 三角形境界要素による静電場	6
3.1 P0 表面電荷の積分	6
3.2 辺の対数項と立体角	6
3.3 自己電位と片側電場	7
4 場の高速化と二軸周期境界	8
4.1 Direct、treecode、FMM	8
4.2 treecode の遠方判定と電荷相殺	8
4.3 Cartesian FMM の展開	8
4.4 二軸周期場の分割	9
4.5 Ewald 和から生成する遠方作用素	10
4.6 Gauss 則で閉じる物理的零モード	11
5 粒子積分と幾何イベント	12
5.1 同時刻の位置と速度を使う Boris 更新	12
5.2 三角形との最初の交点	12
5.3 計算箱の作用と event の発生順	13
5.4 周期画像と未解決軌道	13
6 粒子流入と表面からの電子放出	15

6.1	境界を横切る速度分布	15
6.2	粒子源と任意の速度分布	16
6.3	上流無限遠の分布と面平均電位による補正	16
6.4	照射 ray による光電子放出	16
6.5	吸収時の二次電子放出	17
7	表面電荷更新と時間離散化	18
7.1	絶縁体への電荷蓄積	18
7.2	閉じた光電子の統計的帰還 closure	18
7.3	浮遊導体の等電位化	18
7.4	バッチ幅の安定性	19
7.5	非零モードの適応幅と監視値	19
8	外部シースのモデルと上端面への接続	21
8.1	対象と仮定	21
8.2	軌道と粒子集団	22
8.3	Poisson 方程式と電位構造	25
8.4	閉じる条件	27
8.5	物理解の条件	28
8.6	数値アルゴリズム	29
8.7	数値例	31
8.8	BEACH の上端面への接続	35
8.9	適用範囲	39
9	検証、収束、再現性	40
9.1	計算の完了と科学的妥当性	40
9.2	誤差を支配する軸から検証する	40
9.3	独立した参照解による基本検証	40
9.4	電荷の収支と channel 別の監査	41
9.5	標本誤差と平衡判定	41
9.6	再現性のために記録する情報	41
10	研究への応用	42
10.1	物体間力と離脱の評価	42
10.2	論文で明示すべき方法と限界	42
10.3	データと原稿作成に関する記載	43

目次

2.1	表面場、粒子追跡、電荷移送のモデル分担	3
2.2	基本の表面帯電サイクル	5
3.1	P0 三角形の評価幾何と電場の跳び	7
4.1	FMM の展開係数の集約と共有	9
4.2	周期画像と零モードの分担	10
5.1	同時刻 Boris 更新と最初の幾何 event	14
6.1	体積分布と境界流束分布の違い	15
6.2	照射 ray と光電子の電荷収支	17
7.1	単一線形緩和モデルのバッチ幅と安定性	20
8.1	Type A の電子のエネルギー図と軌道の分類	23
8.2	Type A の電荷密度と第一積分	26
8.3	外部シースの Type A、B、C	27
8.4	上流の帯と場の不足の数値例	29
8.5	零電流根の求解手順	31
8.6	Type A、B、C の電位と電場の数値解	32
8.7	Type A の粒子集団ごとの数密度	33
8.8	Type A の電子の速度分布	34
8.9	太陽高度に対する零電流根	34
8.10	零電流の物理解が見つかる型の分布	35
8.11	外部シースと上端面の接続	38

第 1 章

研究背景と先行研究

1.1 表面電位は粒子の到達を変える

宇宙空間の表面は、電子・イオンの捕集、光電子放出、二次電子放出などによって帯電する。表面電位は粒子が到達できる速度領域を変え、その捕集電流が再び帯電状態を変える。Whipple のレビューは、この電流収支、差動帯電、電位障壁を統一的に整理した基礎文献である [19]。この問題では、総電荷だけでなく、異なる表面部分の電位差が意味を持つ。

単一の浮遊物体を等電位とみなせる場合、電流収支を一つの電位について閉じられる。絶縁体、多数粒子の集合、粗い地形では、局所的な照射と遮蔽、接近軌道、再吸収先が異なる。BEACH が三角形要素ごとに電荷を保持するのは、この空間的な差を表現するためである。ただし絶縁体という指定は、材料内部の分極と伝導まで含むことを意味しない。

1.2 月面・無大気天体での動機

太陽風の電子とイオン、および太陽光で放出される光電子は、無大気天体表面の帯電とシースを作る。Stubbs らは帯電したダストの静電加速と弾道運動を組み合わせる dynamic fountain model を提案した [17]。これはダスト移動を考える動機となるが、帯電を求めるだけで浮上量を確定できるわけではない。付着力、粒子の質量、初期条件を含む別の力学評価が必要になる。

粒子スケールの表面を扱った Zimmerman らの研究は、レゴリス粒子間の電荷差が、平面シースだけから見積もる電場と異なる局所電場を作り得ることを示した [22]。この知見は、幾何と局所電荷を解像する研究の動機となる。同論文の伝導と絶縁破壊に関する物理まで BEACH に実装されたとは解釈しない。

観測解釈にも複数の機構がある。Horányi らは LADEE の観測した非対称な月周辺ダスト雲を高速な惑星間ダストの衝突による放出として説明した [6]。したがって、月面ダストの存在をそのまま静電浮上の証拠と扱うことはできない。BEACH を使う研究では、帯電機構の検証と、ダスト観測の起源の検証を分ける必要がある。

1.3 シースモデルと三次元局所計算

Zhao らは平面光電子シースの解析解と kinetic PIC 計算を比較し、非単調な Type A と単調な Type B、Type C の電位構造を扱った [21]。第8章の外部シースモデルはこの平面定常モデルの定式化に従い、同章の closure はそれを箱の外の領域に用いる。全領域を PIC で解くものではない。

Sana と Mishra は、太陽光と太陽風の分布を考慮した単調・非単調シース構造を解析した [15]。複数の電位構造が候補となることは、closure の型を明示して検証する理由になる。同じ

著者らは、太陽風イオンの有限温度を圧力項としてイオン流体に加え、シース構造への影響を調べた [16]。第8章の外部シースのイオン輸送は、この流体モデルに従う。

三次元の粒子・地形スケールと、より大きい外部シーススケールを両方 kinetic に解くと、空間解像度、飛行時間、粒子数の要件が同時に増える。BEACH は局所の三次元表面電荷と軌道に計算を集中し、必要なら外部領域を平面定常シースの零電流根へ縮約する。この分担は計算の目的に応じたモデル化であり、PIC と同じ現象を一般に保持する保証ではない。

1.4 採用手法の系譜

三角形上の Green 関数とその勾配の解析積分は、panel 型の場合計算の基礎となる。Wilton らは多角形上の一様・線形 source の電位積分を閉じた形で与え [20]、Graglia は線形形状関数と Green 関数の勾配を含む積分を整理した [3]。BEACH は要素内一定密度 (P0) の source を用い、立体角は Van Oosterom と Strackee の公式で評価する [18]。

遠方群を階層的にまとめる treecode は Barnes–Hut の考え方に連なる [2]。FMM は source の多重極展開と target の局所展開を用いて長距離相互作用を高速化する手法である [4]。BEACH は近傍で三角形積分を保ち、遠方に三角形の面積平均 moment を用いる。このため、三角形を重心の点電荷に置き換えるモデルとは近傍精度も高次 moment も異なる。

2 軸周期系の Ewald 分割については Lindbo と Tornberg の定式化が参考になる [7]。BEACH は同論文の FFT 型の解法ではなく、Ewald 和を参照として生成した遠方作用素を FMM に組み込み、Gauss 則で閉じる零モードを別に加える。粒子更新には Boris 法、軌道線分と三角形の交差には Möller–Trumbore 法を用いる [9, 13]。

第 2 章

モデルの分担と支配方程式

2.1 状態量と計算領域

表面メッシュを N 個の三角形 T_i で構成し、頂点、面積 A_i 、重心 $\mathbf{c}_i$ 、単位法線 $\mathbf{n}_i$ を保持する。形状は帯電計算中に固定される。要素の状態量は総電荷 q_i [C] であり、面電荷密度は

$$\sigma_i = \frac{q_i}{A_i} \quad [\text{C m}^{-2}] \quad (2.1)$$

である。

荷電テスト粒子 p は、位置 $\mathbf{x}_p$ 、速度 $\mathbf{v}_p$ 、実粒子一個の電荷 q_p 、質量 m_p 、macro weight w_p を持つ。軌道は電荷質量比 q_p/m_p で決まり、表面へ移す電荷は $q_p w_p$ である。粒子種ごとに、電荷・質量、速度分布、粒子源、境界での作用を指定する。図2.1に、場の source、粒子の運動、表面への電荷移送の分担を示す。

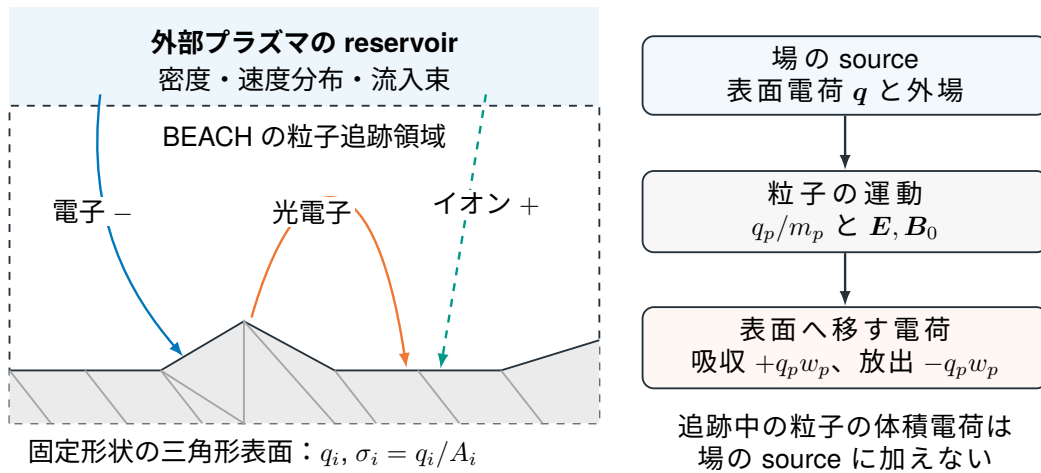


図 2.1: 表面場、粒子追跡、電荷移送のモデル分担。軌道と凹凸は模式図である。粒子の運動には実粒子の q_p/m_p 、電荷収支には重みを含む $q_p w_p$ を使う。外部シースを接続する場合の上端面条件は図8.11に示す。

2.2 テスト粒子と表面電荷の自己無撞着性

粒子の運動方程式は、非相対論的 Lorentz 力

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{v}_p, \quad \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{q_p}{m_p} [\mathbf{E}(\mathbf{x}_p) + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_0] \quad (2.2)$$

である。 $\mathbf{B}_0$ は一様な外部磁場であり、誘導磁場は求めない。場は表面電荷と指定した外場から作る。

自由空間の静電場では、表面以外の領域に対して

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi + \mathbf{E}_0 \quad (2.3)$$

となる。ここで ϕ は表面電荷が作る電位であり、一様外場を電位に含める場合は $-\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}$ を一度だけ加える。追跡中の電子・イオンが空間に作る体積電荷は、この場の右辺に含まれない。

表面電荷の更新と次の粒子軌道は結合するが、体積プラズマを自己無撞着に解く PIC ではない。第8章の外部シース closure は箱の外の空間電荷を上端面の条件として取り込むが、箱の内側の体積電荷を補うものではない。局所の空間電荷が場を支配するケースでは、その効果を独立した kinetic 計算で調べる。

2.3 二つの時間刻み

粒子の一回の軌道更新幅を δt 、表面電荷更新のバッチ幅を h とする。バッチ数を N_b とすると、累積帯電時間は受理された幅の和

$$t_{\text{charge}} = \sum_{n=0}^{N_b-1} h_n \quad (2.4)$$

となる。粒子一個の追跡時間の上限 $N_{\text{max}} \delta t$ (N_{max} は step 数の上限) は別の量である。一つのバッチで複数の粒子種の軌道を順に追っても、その飛行時間を足して帯電時間にはしない。

2.4 一バッチの結合手順

図2.2の順序で、場の構成から電荷差分の確定までを一バッチとして進める。同じバッチ中の粒子は同じ場を参照する。先に吸収された粒子の電荷が、後続粒子へ即時に作用することはない。この分離によって粒子ごとの並列計算が可能になる一方、場を固定する時間幅の誤差を持つ。各バッチで生成した粒子は、そのバッチの中で吸収、escape、追跡上限のいずれかに達するまで追ひ、次のバッチへ持ち越さない。追跡上限に達した粒子は未解決として、吸収や escape と区別して集計する。したがって、バッチ幅を超える飛行時間による帰還の遅れは表現しない。

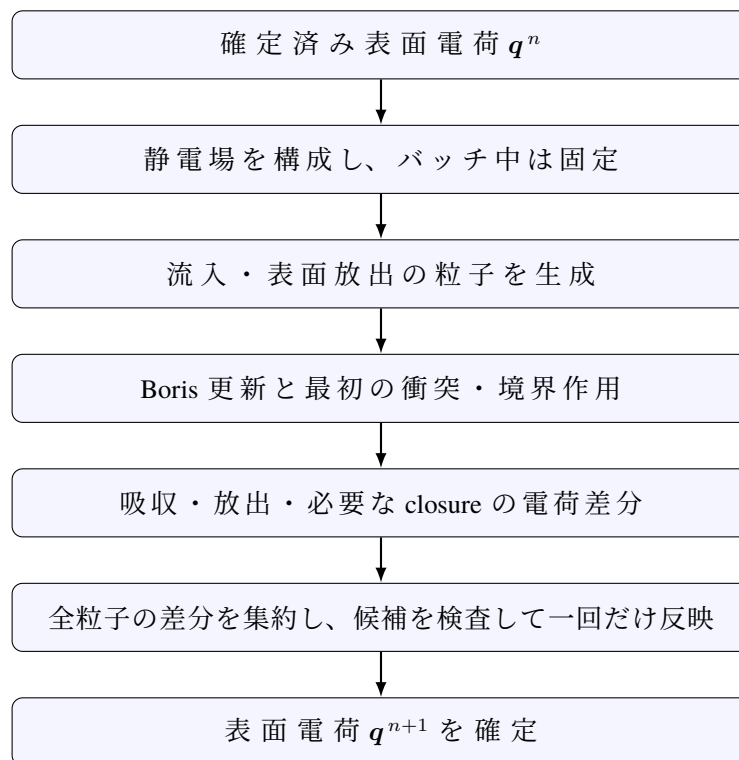


図 2.2: 基本の表面帯電サイクル。外部シースを接続する場合は、吸収・放出の電荷差分を外部根の電流目標に合わせ、外部根の更新があれば受理後に根を解き直す。

第 3 章

三角形境界要素による静電場

3.1 P0 表面電荷の積分

自由空間の Coulomb 定数を $k_c = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ とすると、式(2.1)の source が作る電位と電場は

$$\phi(\mathbf{x}) = k_c \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{A_i} \int_{T_i} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dS_{\mathbf{y}}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{x}) = k_c \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{A_i} \int_{T_i} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} dS_{\mathbf{y}}. \quad (3.2)$$

要素電荷は粒子の吸収・放出から蓄積量として決まるため、絶縁体では、境界電位から全 q_i を逆算する連立方程式は解かない。浮遊導体の等電位化（第7章）だけが、追加の境界条件を連立方程式として課す。

P0 は要素ごとの一定密度近似であり、真の表面電荷密度の連続性や細部を完全には表さない。面の積分を正確に評価しても、三角形形状と密度の離散化誤差は残る。

3.2 辺の対数項と立体角

一つの三角形について解析積分の構造を示す [20]。評価点 $\mathbf{x}$ の面からの符号付き高さを $d = (\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{n}$ 、平面への投影を $\mathbf{x}_{\parallel}$ 、辺 e の面内外向き単位法線を $\boldsymbol{\nu}_e$ 、辺 e 上の一点を $\mathbf{a}_e$ とする。辺の長さを ℓ_e 、評価点から両端までの距離を $r_{e,1}, r_{e,2}$ とおくと、

$$L_e = \log \frac{r_{e,1} + r_{e,2} + \ell_e}{r_{e,1} + r_{e,2} - \ell_e}, \quad d_e = (\mathbf{a}_e - \mathbf{x}_{\parallel}) \cdot \boldsymbol{\nu}_e \quad (3.3)$$

を用いて

$$I_{\phi} = \sum_e d_e L_e - d \Omega, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{I}_E = \sum_e \boldsymbol{\nu}_e L_e + \mathbf{n} \Omega, \quad (3.5)$$

$$\phi_i = k_c \frac{q_i}{A_i} I_{\phi}, \quad \mathbf{E}_i = k_c \frac{q_i}{A_i} \mathbf{I}_E \quad (3.6)$$

となる。 Ω は評価点が法線 $\mathbf{n}$ の側にあるとき正となる符号付き立体角であり、頂点への相対ベクトル $\mathbf{r}_k = \mathbf{a}_k - \mathbf{x}$ ($r_k = \|\mathbf{r}_k\|$) から

$$\Omega = -2 \operatorname{atan2} \left(\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3), r_1 r_2 r_3 + (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) r_3 + (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3) r_1 + (\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1) r_2 \right) \quad (3.7)$$

で計算する [18]。評価点が面上にあるときは、次節の自己項と片側極限を用いる。

重心に点電荷を置く近似と異なり、三角形の広がり近傍でも保持する。特異性を経験的な softening 長で置き換えることはしない。

3.3 自己電位と片側電場

要素内の評価点では、面上の電位は連続であり、面積を持つ三角形の自己電位も有限である。法線電場は表面電荷によって跳ぶ。

$$\mathbf{E}_i^\pm = \mathbf{E}_i^{\text{PV}} \pm \frac{\sigma_i}{2\epsilon_0} \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_i^+ - \mathbf{E}_i^-) = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0}. \quad (3.8)$$

PV は両側極限の平均としての principal value である。面上の電場には、粒子が存在する側の片側極限を用いる。閉じた物体では外向き法線の側をとる。衝突は面の両側から検出する (第5章) ので、衝突の表裏と電場の片側極限の選択は独立である。図3.1は、有限三角形の幾何と面を横切る電場の跳びを並べて示す。

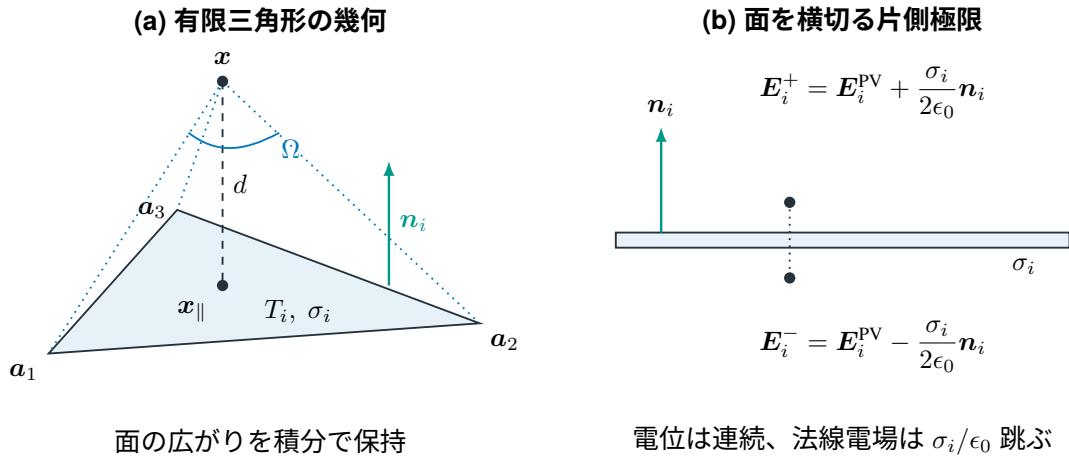


図 3.1: P0 三角形の評価幾何と電場の跳び。左の破線は面への投影、点線は頂点への視線を示す。右は要素内部の点での局所的な断面模式図であり、PV は両側極限の平均である。有限 panel の主値には接線成分もあり得るため、電場全体を法線方向の矢印で置き換えていない。

第 4 章

場的高速化と二軸周期境界

4.1 Direct、treecode、FMM

N 個の source に対する M 点の Direct 評価は $O(MN)$ の panel 和である。遠方近似を含まないので、小規模な計算では他の手法の基準になる。

treecode は source の octree を評価点ごとに走査し、十分に遠い node を一つの monopole で置き換える [2]。FMM は target 側にも局所展開を作り、遠方群の寄与を多くの評価点で共有する [4]。どちらも近傍は第3章の解析 panel 積分で評価する。

4.2 treecode の遠方判定と電荷相殺

node 内の総電荷、絶対電荷和、電荷中心を

$$Q_n = \sum_{i \in n} q_i, \quad S_n = \sum_{i \in n} |q_i|, \quad c_{Q,n} = \frac{\sum_{i \in n} q_i c_i}{Q_n} \quad (4.1)$$

とする。 Q_n が極小のときは幾何中心を用いる。node 半径 R_n は全三角形の頂点を覆うようにとり、評価点との距離 d_n に対して

$$R_n < \theta(d_n - R_n) \quad (4.2)$$

を遠方の条件とする。重心だけから半径を決めると、評価点に近い大きな panel を誤って monopole にまとめるためである。

さらに、正負の電荷が相殺する node では電荷中心が不安定になるので、node 内の電荷が同符号（丸め誤差の範囲で $S_n = |Q_n|$ ）のときだけ遠方近似を受理し、異符号の電荷が混在する node では子へ降りる。この規則は相殺時の精度を守る一方、細かく正負が混在する分布では高速化の効果を弱める。

4.3 Cartesian FMM の展開

多重指数 $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ を使い、 $|\alpha| = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z$ 、 $\alpha! = \alpha_x! \alpha_y! \alpha_z!$ とする。中心 c の panel moment を、階乗を含む規約で

$$M_\alpha(c) = \sum_i \frac{q_i}{A_i \alpha!} \int_{T_i} (\mathbf{y} - \mathbf{c})^\alpha dS_y \quad (4.3)$$

と定義する。重心点の monomial ではなく、三角形上の厳密な面積平均を用いる。

FMM の手順は、leaf の moment を作る P2M、親へ集約する M2M、遠方 source を target の局所展開へ移す M2L、子へ伝える L2L、評価点で計算する L2P からなる。近傍は解析 panel の Direct 和を加える。例えば、中心間変位を $\mathbf{d} = \mathbf{c}_{\text{child}} - \mathbf{c}_{\text{parent}}$ とすると

$$M_{\beta}(\mathbf{c}_{\text{parent}}) = \sum_{\text{child}} \sum_{\alpha \leq \beta} M_{\alpha}(\mathbf{c}_{\text{child}}) \frac{\mathbf{d}^{\beta-\alpha}}{(\beta-\alpha)!} \quad (4.4)$$

で集約する。 $G(\mathbf{r}) = 1/\|\mathbf{r}\|$ 、 $\mathbf{R} = \mathbf{c}_t - \mathbf{c}_s$ に対して M2L は

$$L_{\alpha}(\mathbf{c}_t) += \sum_{\beta} (-1)^{|\beta|} M_{\beta}(\mathbf{c}_s) \partial^{\alpha+\beta} G(\mathbf{R}) \quad (4.5)$$

となる。 L_{α} は局所電位の微分係数であり、

$$\phi_{\text{far}}(\mathbf{x}) \simeq k_c \sum_{|\alpha| \leq p} L_{\alpha} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{c}_t)^{\alpha}}{\alpha!}, \quad \mathbf{E}_{\text{far}} = -\nabla \phi_{\text{far}} \quad (4.6)$$

で評価する。

木、相互作用 pair、平行移動の係数は geometry だけで決まるので初期化時に一度だけ作り、バッチごとには電荷に依存する moment と局所展開だけを更新する。展開次数は $p = 4$ とし、精度は開き角 θ と leaf の要素数で調整する。図4.1に、展開の集約と共有、近傍 Direct 和の関係を示す。

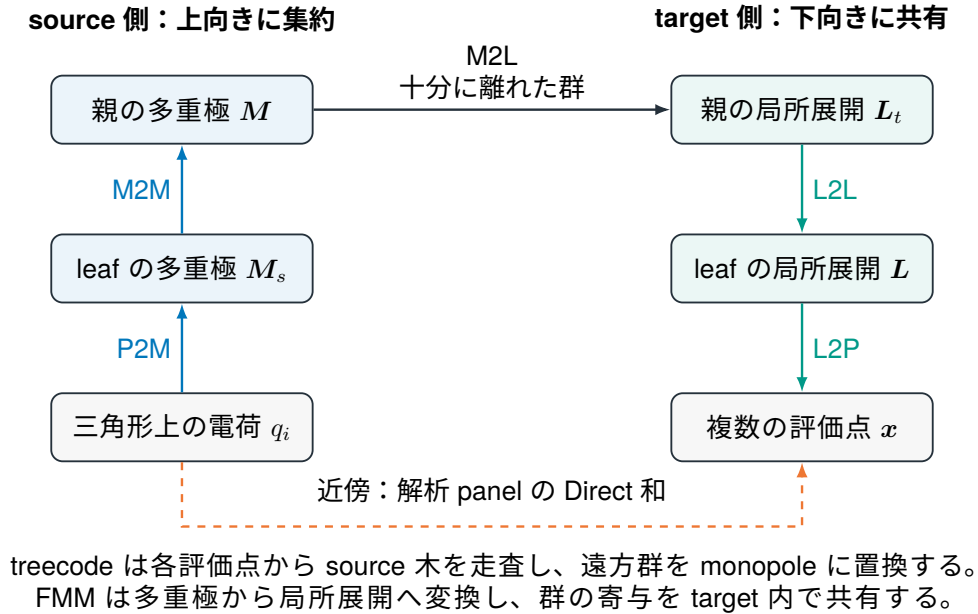


図 4.1: FMM の上向き・相互作用・下向きの流れ。矢印は展開係数の変換であり、粒子の移動ではない。木の一枝と一つの遠方 pair を模式的に示す。近傍の解析 panel 和は遠方展開とは別に加える。

4.4 二軸周期場の分割

x, y 方向に周期 L_x, L_y 、 z 方向に非周期の slab を考える。表面 mesh は一つの周期セルの三角形だけを持ち、場の評価と衝突判定で周期画像を扱う。セルの横面積を $A_c = L_x L_y$ とし、電位と電場の評価作用素を K と書くと、

$$K_s = \underbrace{K_{\text{shell}}(N) + \mathcal{F}[R_{\text{Ewald}} + s]}_{k \neq 0} - K_0^{\text{sym}} - S + K_0^{\text{phys}} \quad (4.7)$$

へ分ける。 $K_{\text{shell}}(N)$ はセル自身と、各周期軸に N 層までの画像の直接評価であり、近傍は panel 積分、それ以外は画像の平行移動を含めた M2L で評価する。 $R_{\text{Ewald}} = K_{\text{Ewald}} - K_{\text{shell}}(N)$ はその外側の画像からの滑らかな残差、 $\mathcal{F}$ は次節の作用素による近似である。

$K_{\text{shell}}(N)$ をセル上で面平均すると、無限面電荷の平均場 K_0^{sym} (k_c を除いた単位で、高さ h の単位電荷あたり $-2\pi|h|/A_c$) と滑らかな残り $s(h)$ の和になる。 s は $1/r$ を画像ブロック上で積分した閉じた式から K_0^{sym} を引いたもので、 $h=0$ でも解析的である。残差 R_{Ewald} の面平均はちょうど $-s$ なので、作用素には面平均が 0 の $R_{\text{Ewald}} + s$ だけを近似させ、 s は source ごとの高さの関数として $S(z) = \sum_i q_i s_i(z)$ を実行時に引く。これにより $k \neq 0$ 部分は面平均を持たず、面平均成分は Gauss 則で閉じる K_0^{phys} として一度だけ加わる。図4.2は、画像の範囲による分割と、面平均による分割を区別して示す。

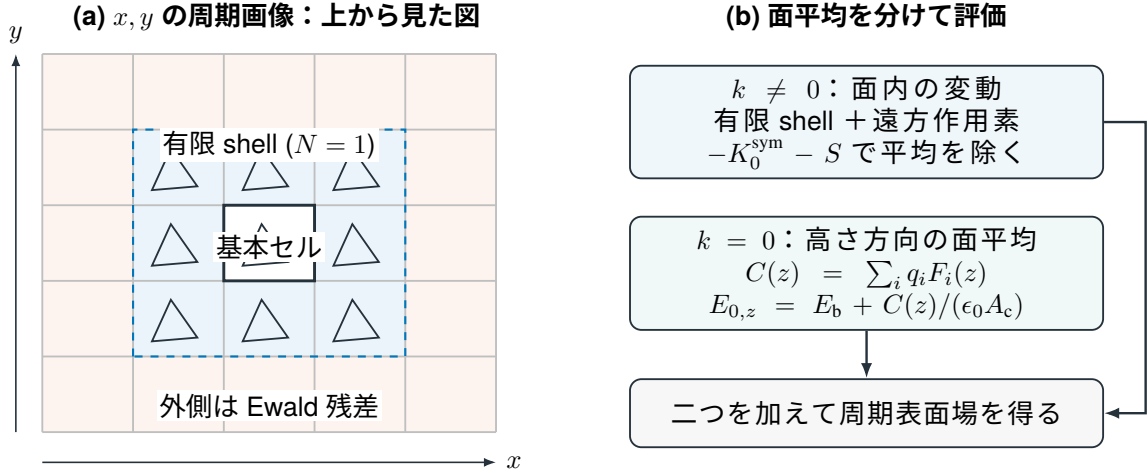


図 4.2: 有限画像と遠方残差、および非零モードと零モードの分担。左は $N = 1$ の画像集合の模式図で、外側の画像は無限に続く。右の省略した遠方作用素の内訳は式(4.7)に示す。 z は非周期であり、面平均場を一度だけ加えることが重要である。

4.5 Ewald 和から生成する遠方作用素

参照の 2 軸周期 Coulomb 和は、kernel を

$$\frac{1}{r} = \frac{\text{erfc}(ar)}{r} + \frac{\text{erf}(ar)}{r} \quad (4.8)$$

に分け、第 1 項を実空間の画像和、第 2 項を周期 2 軸の逆空間和として評価し、非周期軸は実座標のまま残す [7]。 a は実空間と逆空間の計算量を配分する数値 parameter であり、Debye 遮蔽長の逆数ではない。参照は十分な層数で打ち切った有限和とし、作用素の生成時にだけ評価する。

geometry を固定すれば遠方残差は電荷に対して線形である。source 木の深さ 2 の節点 s の多重極係数を M_s 、target 木の深さ 2 の節点 t の遠方局所係数を L_t^{far} とすると、

$$L_t^{\text{far}} = \sum_s A_{t,s} M_s \quad (4.9)$$

と書ける。source 全体を根の多重極一つで表すと、source の高さ方向の広がり、除いた最も近い画像までの距離 ($N = 1$ で周期長の約 2 倍) に近い場合に展開がほとんど収束しないので、深さ 2 の節点に分けて展開の収束を確保する。 $A_{t,s}$ は、source 節点を囲む代理点の電荷から多重極への写像 (最小ノルムの擬似逆) と、target 節点の周囲に置いた検査点で残差の電場を局所展開で再現する正則化 QR の最小二乗解を合成して求める。擬似逆を求める前に、長さ

の次数が異なる多重極の行を正規化する。電場の fit では決まらない局所展開の定数項は、同じ検査点の電位の残差から別に求める。

作用素は geometry だけで決まるので一度生成すれば再利用できる。バッチごとの計算では、通常の M2L の後、L2L の前に $\mathbf{L}_t \leftarrow \mathbf{L}_t + \sum_s \mathbf{A}_{t,s} \mathbf{M}_s$ を加え、その後は通常の L2L と L2P で評価する。粒子の評価ごとに Ewald 和を計算することはない。

大きな有限画像場と零モードを差し引いて小さな非零場を得る条件では、作用素の fit 残差が誤差を支配し得る。弱い外部場と比較する研究では、非零場の絶対誤差を Fourier 和などの独立な参照で確認する。

4.6 Gauss 則で閉じる物理的零モード

三角形 i のうち高さ z 以下の面積割合を $F_i(z)$ とおくと、累積電荷は

$$C(z) = \sum_i q_i F_i(z) \quad (4.10)$$

である。傾いた三角形の F_i は頂点高さの間で区分二次、水平三角形は sheet の跳びになる。 F_i は geometry だけで決まるので区分多項式の係数を前計算し、電荷の更新ごとに $C(z)$ とその積分を組み立てる。下側遠方電場 E_b と gauge (z_g, ϕ_g) を指定すると

$$E_{0,z}(z) = E_b + \frac{C(z)}{\epsilon_0 A_c}, \quad (4.11)$$

$$\phi_0(z) = \phi_g - E_b(z - z_g) - \frac{1}{\epsilon_0 A_c} \int_{z_g}^z C(\zeta) d\zeta \quad (4.12)$$

となる。全電荷 $Q = \sum_i q_i$ に対する二つの closure は

$$E_b = \begin{cases} -Q/(2\epsilon_0 A_c) & \text{対称な上下真空,} \\ 0 & \text{下側電束を零に指定} \end{cases} \quad (4.13)$$

である。どちらも材料内部の誘電分極や遮蔽を解くモデルではない。

非中性 cell の遠方には一定電場と線形電位が残り得る。また $Q = 0$ でも、高さによって正負の電荷が分離すれば $C(z)$ は零とは限らない。零モードを単に消すと、この高さ分布と Gauss 則を失う。外部シースを接続する場合は、gauge を上端面の電位の基準に用い、表面電荷の零モードと外部空間電荷の役割を分けて二重に数えない (第8章)。

第 5 章

粒子積分と幾何イベント

5.1 同時刻の位置と速度を使う Boris 更新

入力状態は $(\mathbf{x}^n, \mathbf{v}^n)$ であり、速度だけ半時刻にずらして保持する状態ではない。まず予測中点

$$\mathbf{x}_{\text{mid}} = \mathbf{x}^n + \frac{\delta t}{2} \mathbf{v}^n, \quad \mathbf{E}_{\text{mid}} = \mathbf{E}(\mathbf{x}_{\text{mid}}) \quad (5.1)$$

で電場を一回評価する。周期軸では、場の評価点だけを基本セルへ写す。

速度更新は電場半 step、磁場回転、電場半 step である。

$$\mathbf{v}^- = \mathbf{v}^n + \frac{q}{m} \mathbf{E}_{\text{mid}} \frac{\delta t}{2}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{t} = \frac{q}{m} \mathbf{B}_0 \frac{\delta t}{2}, \quad \mathbf{s} = \frac{2\mathbf{t}}{1 + \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^- \times \mathbf{t}, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}' \times \mathbf{s}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^+ + \frac{q}{m} \mathbf{E}_{\text{mid}} \frac{\delta t}{2}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \frac{\delta t}{2} (\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n+1}). \quad (5.7)$$

磁場回転は Cayley 型の直交変換となり、電場が零なら速度の大きさを保つ。ただし数値的な旋回角は $2 \arctan(\omega_c \delta t / 2)$ であり、速さを保存しても大きな step の旋回位相まで正確とは限らない。

標準の Boris 法は位相空間体積を保存する [13] が、本更新は電場の標本点と位置の更新が異なるので、その性質をそのまま引き継ぐとは限らない。滑らかな静電場では位置・速度とも 2 次精度である。ただし衝突、境界作用、バッチ間の場の更新を含む全体の精度は、別に確認する必要がある。

δt は、一 step の旋回角 $|q| \|\mathbf{B}_0\| \delta t / m$ 、電場が空間的に変化する長さを粒子が通過する時間、三角形や箱の面の近くを横切る時間のいずれも解像する大きさに選ぶ。三角形との交差は一 step の chord で判定するので、一 step 中に軌道が強く曲がる場合や細かい形状を通過する場合は、 δt を小さくして衝突位置、命中要素、吸収と escape の統計を収束させる。 δt を半分にするときは N_{max} を 2 倍にし、一粒子を追跡できる時間 $N_{\text{max}} \delta t$ を揃えて比較する。

5.2 三角形との最初の交点

候補軌道の chord を

$$\mathbf{x}(\lambda) = \mathbf{x}^n + \lambda(\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (5.8)$$

とする。三角形の頂点 a, b, c に対して

$$a + u(b - a) + v(c - a) = x(\lambda) \quad (5.9)$$

を Möller–Trumbore 法で解き [9]、 $u \geq 0$ 、 $v \geq 0$ 、 $u + v \leq 1$ 、 $0 \leq \lambda \leq 1$ を満たす交点の最小 λ を採用する。法線の符号による back-face 除去は行わず、両側から衝突を検出する。

候補の絞り込みには三角形の AABB を用いる。小規模な mesh では全要素を線形に調べ、大きい mesh では一様格子と三次元 DDA[1] によって chord が通る cell を順にたどり、その cell に登録された三角形だけを精密に判定する。

5.3 計算箱の作用と event の発生順

mesh との交点と箱の面の通過の λ を比較し、先に起こるものだけ进行处理する。丸め誤差の範囲で同時なら mesh への吸収を優先する。

箱の面の作用 生存粒子への処理	
開放	escape、または外部の電位障壁で帰還か escape かを判定
鏡面反射	法線速度を反転し、残り時間を再積分
再配置反射	反射に加え、面内の位置を一様を選び直す
周期	反対面へ移し、速度を保って残り時間を再積分

再配置反射は、外部を移動して帰還する粒子の面内位置を縮約する選択肢である。一つの面での反射では面内の 2 軸の位置を選び直し、辺や角で複数の面に同時に達したときは、達した面に含まれない軸だけを選び直す。光電子の上部境界で水平位置を randomize する Zimmermanらの設定に着想を持つ [22]。外部軌道の飛行時間や自己無撞着シースを再現するものではない。

event での速度は chord 方向を使い、その速さを離散仕事

$$|v_{\text{event}}|^2 = |v^n|^2 + 2 \frac{q}{m} E_{\text{mid}} \cdot (x_{\text{event}} - x^n) \quad (5.10)$$

に整合させる。chord の λ を残り時間の割合にも使うため、強い加速・旋回時の真の交差時刻を解いているわけではない。電場が零なら、磁場の強さによらず event の前後で速さを保つ。右辺が正にならない退化した event では、粒子を推定で分類せずに計算を停止する。外部シースを接続した上端面の通過も同じ chord の交差で判定する。図5.1に、場の評価点と、候補 chord 上で event を選ぶ手順を示す。

5.4 周期画像と未解決軌道

周期場の画像の層数と、衝突で調べる画像の範囲は独立に決める。衝突では、chord の AABB と基本セルの mesh の AABB が重なる画像を列挙し、命中した画像を基本セルの要素へ対応づけて電荷を堆積する。場の評価点を基本セルへ写すだけでは、セル境界の手前で周期画像の表面へ衝突する event を検出できない。

追跡上限に達した粒子は未解決として集計し、吸収や escape と区別する。未解決の割合が大きい計算は、吸収電流が収束した結果とみなさない。

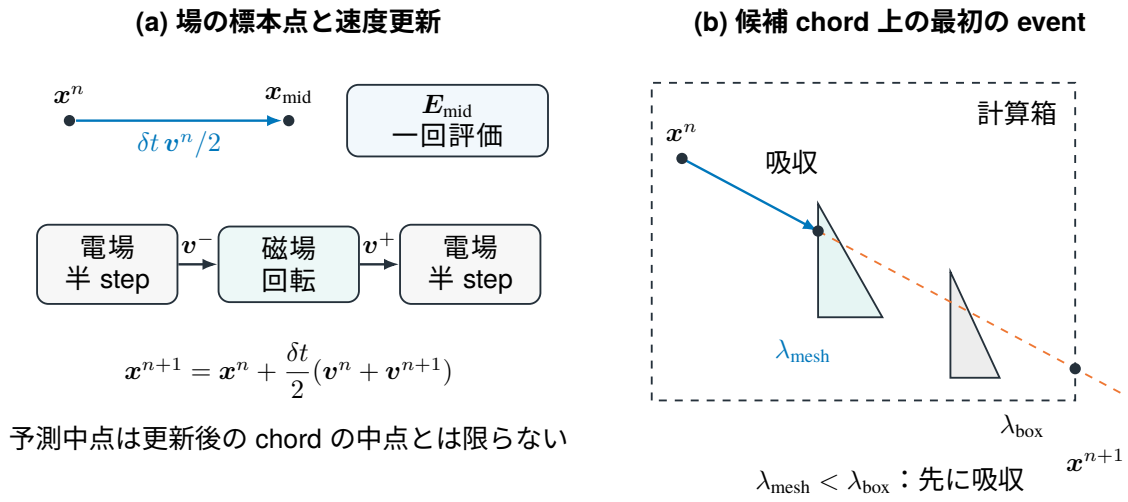


図 5.1: 同時刻 Boris 更新と幾何 event の模式図。左では予測中点で電場を標本化し、更新後の速度から候補位置を作る。右の橙色破線は候補 chord のうち最初の吸収より後の部分であり、粒子をそこまで進めない。真の曲線軌道と交差時刻の近似は δt の収束で確認する。

第 6 章

粒子流入と表面からの電子放出

6.1 境界を横切る速度分布

数密度で規格化した位相空間分布を $f_s(\mathbf{v})$ 、内向き法線速度を $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\text{in}}$ とすると、境界流入束は

$$\Gamma_s = \int_{v_n > 0} v_n f_s(\mathbf{v}) d^3v. \quad (6.1)$$

境界を横切る粒子は $v_n f_s$ から標本化する。体積中の Maxwell 分布をそのまま境界速度へ使うと、低速粒子を過剰に注入する。

法線ドリフト u_n 、一次元熱速度の標準偏差 $s = \sqrt{k_B T/m}$ を持つ Maxwell 分布では

$$\Gamma = n \left[\frac{s}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u_n^2}{2s^2}\right) + \frac{u_n}{2} \operatorname{erfc}\left(-\frac{u_n}{\sqrt{2}s}\right) \right]. \quad (6.2)$$

流入面積 A_f とバッチ幅 h に対し、macro 粒子数の期待値は

$$\mathbb{E}[N_{\text{macro}}] = \frac{\Gamma A_f h}{w}. \quad (6.3)$$

整数化の端数を後のバッチへ持ち越すことで、長時間の流入量を表す。図6.1は、drift が零の場合に体積分布と流束分布がどのように異なるかを示す。

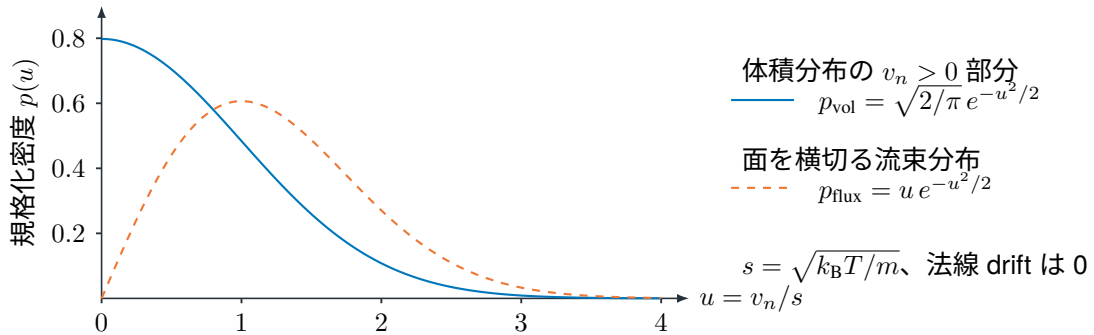


図 6.1: drift のない Maxwell 分布から導いた、正の法線速度の二つの規格化分布。横軸 u と縦軸 $p(u)$ は無次元で、各曲線の $u \geq 0$ の積分は 1 である。流束の標本には v_n による重みが必要であり、低速極限で流束密度は零になる。数値実験の histogram ではなく解析式の図示である。

6.2 粒子源と任意の速度分布

粒子は、計算箱の外部境界からの流入、内部の面源、体積内の標本として生成できる。外部プラズマは、境界の外側に一様な分布を仮定した reservoir からの流束（式(6.1)）として入れる。

Maxwell 分布以外の分布は、速度格子上の表で与える。表が位相空間分布なら式(6.1)に従って v_n を掛けて流束の分布にし、既に流束で重み付けした分布ならそのまま標本化する。分布の形の規格化と、物理的な流束または電流密度による振幅は別に与える。

Maxwell 分布の標本化は平均から $\pm 6s$ で打ち切る。通常の熱分布では無視できる tail でも、障壁を越える希少な粒子が目的量を支配する場合には打ち切りの影響を確認する。

6.3 上流無限遠の分布と面平均電位による補正

境界上で分布を直接与える方法のほかに、上流の基準電位 ϕ_∞ での分布を与え、境界面の平均電位 ϕ_f を用いて

$$\frac{1}{2}mv_{n,f}^2 = \frac{1}{2}mv_{n,\infty}^2 - q(\phi_f - \phi_\infty) \quad (6.4)$$

によって到達条件と法線速度を補正する方法がある。 q は符号を持つため、電子と正イオンでは応答が逆になる。必要なエネルギーを持たない上流粒子は到達流束へ含めない。

この補正は面平均による一つの電位障壁の近似である。箱外の三次元電場、飛行時間、磁化された軌道、途中の非単調電位は解かれない。面内電位差が大きいケースでは、面平均による流入の誤差を評価する。外向きに箱を出る粒子を単に escape とするか、障壁により反射するかは別の境界作用である。

6.4 照射 ray による光電子放出

箱の面上の開口から照射 ray を発射し、最初に命中した要素から光電子を放出する。遮蔽と可視面積が命中率に反映されるため、全表面へ同じ放出量を一律に置くモデルではない。ray は次の箱の面までの区間ごとに最初の命中を探す。非周期の面に達した ray は放出せずに終わり、周期の面に達した ray は反対面へ移って続く。周期軸では周期画像を含めて最初の命中を探し、放出位置を基本セルへ戻す。回り込みの回数には上限を置き、上限までに命中しない ray は粒子を生成しない。図6.2に、照射による可視面の選択と、電子の放出・帰還の電荷収支を示す。

開口面積 A_{ap} 、単位 ray 方向 $\hat{d}$ に対する投影面積は

$$A_{proj} = A_{ap} |\hat{d} \cdot \mathbf{n}_{in}|. \quad (6.5)$$

バッチあたりの ray 数 N_{ray} 、正の放出電流密度 J_{emit} に対し、命中 ray の粒子重みは

$$w_{hit} = \frac{J_{emit} A_{proj} h}{|q| N_{ray}}. \quad (6.6)$$

命中しない ray は粒子を生成しない。ray 数を増やすと一粒子の重みが減り、照射積分の統計誤差が小さくなる。放出時に escape 率を重みに掛けるのではなく、生成後の軌道が再吸収と escape を決める。

放出の法線 $\mathbf{n}_s$ は、命中した要素の法線のうち入射 ray と反対側を向くものとする。温度 T から $\sigma = \sqrt{k_B T / m}$ を求め、法線速度は flux-weighted half-range Maxwell 分布（法線方向の drift を与えることもできる）、接線の 2 成分は平均 0、標準偏差 σ の Gaussian 分布（ $\pm 6\sigma$ で打ち切り）から作る。放出点は命中点から $\mathbf{n}_s$ 方向に 10^{-12} m ずらし、放出直後の自己衝突を避ける。

放出時に放出元要素 i へ $-qw$ を、吸収先 j へ $+qw$ を加える。電子では放出によって正電荷が残り、同じ要素への帰還は相殺、別の要素への帰還は表面間の電荷移送になる。この移送は粒子の飛行によるもので、材料内の表面伝導ではない。

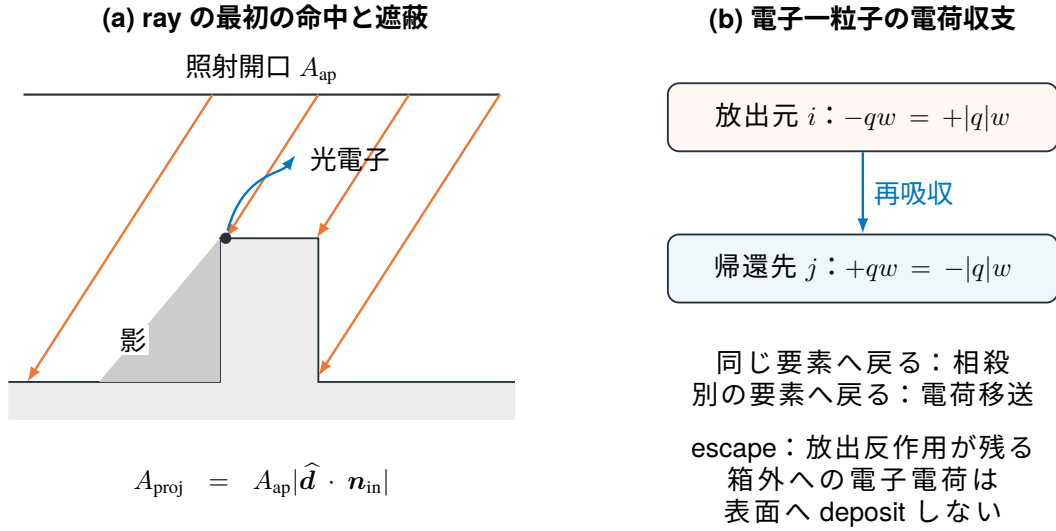


図 6.2: 照射 ray と光電子の電荷収支。左は平行な ray が凹凸に遮られる断面模式図で、命中しない ray は粒子を生成しない。右は $q < 0$ の電子についての符号を示す。放出後の軌道が再吸収と escape を決め、放出重みに事前の escape 率は掛けない。

6.5 吸収時の二次電子放出

入射粒子が要素に吸収されたとき、そのエネルギーと入射角から二次電子を生成できる。入射粒子の実粒子質量を m 、衝突時の速度を v とし、エネルギーを eV 単位で $E = m|v|^2/(2e)$ とする。入射側を向く単位法線を $\hat{\mathbf{n}}$ とし、入射角の余弦を $c = \max(0.1, -v \cdot \hat{\mathbf{n}}/|v|)$ とする。収率には Whipple の総説 [19] に従う形

$$\delta(E, c) = \frac{1.114 \delta_{\max}}{c} \left(\frac{E_{\max}}{E} \right)^{0.35} \left[1 - \exp \left(-2.28 c \left(\frac{E}{E_{\max}} \right)^{1.35} \right) \right] \quad (6.7)$$

を用いる [8]。 $\delta_{\max}$ と $E_{\max}$ は最大収率とそのときの入射エネルギーであり、 $E \leq 0$ では $\delta = 0$ とする。低エネルギーで括弧内が桁落ちしないよう、指数が小さいときは級数で評価する。入射エネルギーと角度によらない一定の収率も選べ、こちらはイオンの入射にも使える。

一回の吸収で生成する macro 粒子数は、期待値 $\delta|q_{in}/q_{see}|$ の整数部に、端数を確率とする Bernoulli 試行を加えたものである。各二次電子は入射粒子の重み w_{in} を受け継ぎ、光電子と同じ方法で速度を作る。法線速度は drift のない flux-weighted half-range Maxwell 分布、接線速度は打ち切り Gaussian 分布であり、温度は放出先の粒子種に与える。放出点は衝突点から法線方向に 10^{-12} m ずらし、周期軸ではセル内へ戻す。

二次電子一個ごとに、放出元の要素へ $-q_{see}w_{in}$ を置き、光電子と同じ放出の電荷として扱う。入射粒子の吸収電荷 $q_{in}w_{in}$ と合わせて、要素の電荷は放出した電子が運び去った分だけ変わる。生成した二次電子は同じバッチの固定された場で追跡し、吸収、escape、追跡上限のいずれかに分類する。二次電子自身の吸収からさらに二次電子を生成でき、一次粒子を世代 0 として世代数に上限を置く。上限の世代で生成するはずだった個数は診断として記録するが、粒子も反作用電荷も作らない。乱数は乱数の種、バッチ、MPI rank、親粒子、step、世代、放出順から決まるので、結果は thread 数や実行順序に依存しない。

このモデルは材質や物体による収率の違い、弾性・非弾性の後方散乱、表面伝導を含まない。入射角の余弦の下限 0.1 は斜入射での発散を避ける暫定の処置であり、斜入射での材料応答を表すものではない。

第 7 章

表面電荷更新と時間離散化

7.1 絶縁体への電荷蓄積

粒子 p が要素 i へ最初に吸収されたとき、その粒子を追跡から除き、

$$\Delta q_i^{\text{abs}} += q_p w_p \quad (7.1)$$

を記録する。放出反作用と選択した closure の補正を含む電荷差分を、バッチ内の全粒子について集約した後一度だけ反映する。絶縁体の基本更新は

$$q_i^{n+1} = q_i^n + \Delta q_i^{\text{abs}} + \Delta q_i^{\text{emit}} + \Delta q_i^{\text{closure}} \quad (7.2)$$

である。光電子と二次電子（第6章）の放出元に置く反作用電荷は Δq_i^{emit} に含まれる。弾性・非弾性の表面散乱、材料内の伝導・拡散はこの吸収モデルに含まれない。

7.2 閉じた光電子の統計的帰還 closure

反射境界によって光電子軌道を閉じて、追跡上限で未帰還が残ることがある。中性帰還 closure は、放出粒子の符号付き電荷 $S < 0$ 、解決済み再吸収 $R < 0$ 、未解決 $U < 0$ に対して $S = R + U$ を確認し、帰還の deposit を S/R 倍する。放出反作用の $-S$ と合わせた表面総電荷増分は零になる。ただし総電荷が零でも、高さの異なる面間で電荷が移れば、面平均した鉛直方向の双極子は残る。

この closure は、未解決粒子の帰還先が解決済み粒子と同じ分布を持つと仮定する。長寿命粒子が特定の表面や速度に偏る場合は、この仮定が成立しない可能性がある。放出があるのに帰還がない場合や実際の escape がある場合にはこの仮定を適用せず、未帰還率が 5% を超える場合も適用範囲外とする。倍率と未帰還率は計算ごとに記録し、結果とともに示す。

固定電流 closure は、与えた電流 I の目標電荷 Ih に軌道から得た分布を合わせる別の closure である。光電子では放出と再吸収を別々に規格化する。大きい二電流の差である小さな正味電流を倍率の分母に用いると、標本誤差を増幅するためである。この補正は軌道から得た空間分布を使う一方、総電流の振幅は外部モデルから与える。倍率が安定でも、要素ごとの分布の統計精度は標本数で決まる。例えば帰還が一件しかなければ、帰還の目標の全量がその要素に置かれる。倍率が 1 から大きく離れる計算では、追跡ではなく closure の仮定が電荷分布を決めている。

7.3 浮遊導体の等電位化

同じ物体に属する浮遊導体の要素電荷を、物体の総電荷を保ったまま、要素重心の電位が等しくなるよう再配分できる。バッチの場と同じ評価法で、導体要素 j だけに単位電荷を置い

たときの導体要素 i の重心電位から、全電荷が零のときの電位（外場と電位の基準定数）を引いたものを influence coefficient H_{ij} とする。電位は電荷について affine なので、 H_{ij} は電荷に対する線形部分だけを表す。自由空間では

$$H_{ij} = \frac{k_c}{A_j} \int_{T_j} \frac{1}{\|\mathbf{c}_i - \mathbf{y}\|} dS_{\mathbf{y}} \quad (7.3)$$

であり、2 軸周期場では周期画像、遠方作用素、零モード（第4章）の寄与も含む。導体 group $g(i)$ の未知電位を $V_{g(i)}$ 、絶縁体電荷・外場・電位の基準定数による電位を ϕ_i^{fixed} とすると、

$$\sum_{j \in \text{conductor}} H_{ij} q_j - V_{g(i)} = -\phi_i^{\text{fixed}}, \quad (7.4)$$

$$\sum_{i \in g} q_i = Q_g^{\text{before relaxation}} \quad (7.5)$$

を解く。geometry は固定なので、 H_{ij} と、この連立方程式の部分 pivot 付き LU 分解は計算の開始時に一度だけ作り、各バッチでは右辺だけを更新して解く。

この再配分は、吸収・放出後の各物体の総電荷を保存する。物体間に接触電流を流すモデルや、接地電位を固定するモデルではない。外部シースを接続して電位の基準を移しても、基準は定数として導体電位に加わるだけで、再配分には影響しない。基本の絶縁体計算とは区別して検証し、mesh の細分化に対する物体電位と表面電荷分布の収束を確認する。

7.4 バッチ幅の安定性

固定した $\mathbf{q}$ に対する粒子応答を十分に平均できると仮定し、要素ごとの符号付き電流密度を $J_i(\mathbf{q})$ とする。平均帯電速度 $F_i = A_i J_i$ に対して、絶縁体の更新は概念的に

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + h\mathbf{F}(\mathbf{q}^n) + \boldsymbol{\eta}^n \quad (7.6)$$

となる。 $\boldsymbol{\eta}^n$ は有限標本に由来する電荷誤差である。滑らかな平均応答の仮定では、場を固定する更新は陽的 Euler 型の帯電離散化と解釈できる。

平均固定点 $\mathbf{q}^*$ は $\mathbf{F}(\mathbf{q}^*) = 0$ を満たす。固定点の式に h が現れなくても、離散更新が同じ点へ安定に収束するとは限らない。 $\mathbf{M} = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{q}|_{\mathbf{q}^*}$ に対する線形条件は

$$\rho(\mathbf{I} + h\mathbf{M}) < 1 \quad (7.7)$$

である。支配固有値が実負で単一の時間尺度 τ に近似できるときだけ、 $h < 2\tau$ が非発散、 $h < \tau$ が単調収束の目安となる。複素固有値、非正規結合、複数固定点にはこの目安をそのまま適用できない。図7.1は、単一の線形緩和に限った場合の単調減衰、交互減衰、増大を比較する。

τ の候補になる物理的な時間尺度には、速いプラズマ応答の目安である電子プラズマ周波数の逆数 ω_{pe}^{-1} と、表面電荷が変わる遅い応答の目安である帯電時間 $\tau_{\text{charge}} \sim C_{\text{eff}}/G_{\text{eff}}$ (C_{eff} は等価容量、 G_{eff} は電位に対する正味電流の感度) がある。実際の上限は geometry、電位、流入分布、表面応答にも依存するので、どちらかをそのまま h の上限にはできない。また $\boldsymbol{\eta}^n$ の分布は macro 粒子数と重みで決まり、 h を変えると重みも変わる粒子源では、幅の比較に時間離散化の差と標本分散の差の両方が含まれる。幅の比較では乱数の種と並列構成を揃え、粒子数と重みも記録して、標本誤差が支配的なら先に粒子統計を改善する。

7.5 非零モードの適応幅と監視値

周期場では候補電荷の変化に対して

$$\max_i |\Delta\phi_{k \neq 0}(\mathbf{c}_i; \Delta\mathbf{q})| \leq \Phi_{\text{max}} \quad (7.8)$$

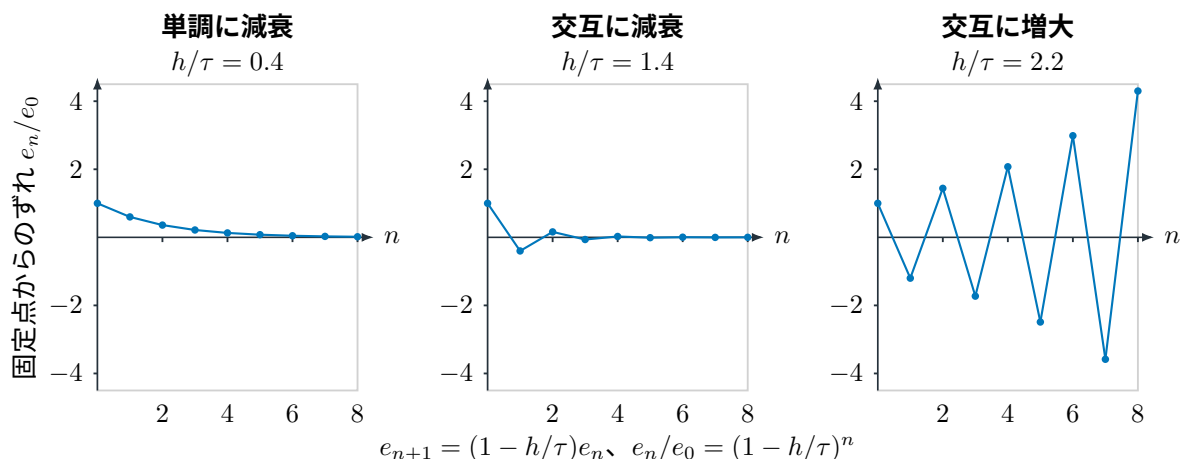


図 7.1: 実負の固有値 $-1/\tau$ を一つだけ持つ線形モデルの、バッチ幅による安定性の違い。各点は図中の漸化式から直接計算した値で、BEACH の帯電履歴ではない。全 panel の縦軸尺度は共通である。標本誤差、複素固有値、非正規結合は含めていない。

を満たすバッチ幅を受理できる。不合格なら $h/2, h/4, \dots$ を試し、棄却した試行は乱数状態を含めて破棄する。この上限は固定した非零場の変化を抑える条件であり、局所打ち切り誤差の推定や全系の精度保証ではない。零モード、外部応答、粒子標本の誤差は別に評価する。

電荷変化の監視量は

$$r_q = \frac{\|\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n\|_2}{\max(\|\mathbf{q}^{n+1}\|_2, q_{\text{floor}})} \quad (7.9)$$

である。 r_q は監視量であり、計算の停止条件には用いない。小さい h や大きな残留電荷によって比が小さくなる場合もあるため、これだけで正味電流が零、または平衡が達成されたと判断しない。

第 8 章

外部シースのモデルと上端面への接続

BEACH の計算箱は外部のシースの厚さよりはるかに小さいので、箱の外を平面・定常のシースに縮約し、その解から上端面の条件を作ることができる。本章では、まずこの外部シースのモデルを BEACH との結合から切り離して説明し、最後に BEACH の上端面へ接続する方法を述べる。対象は、太陽風のイオンと電子、表面から放出される光電子がつくる 1 次元・無衝突のシースである。最初に仮定と粒子の軌道を定め、各粒子集団の密度と流束を電位の関数として導く。次に Poisson 方程式の第一積分から電位構造を Type A、B、C に分け、零電流の閉じ方、物理解の条件、数値アルゴリズムを示す。続いて、太陽風と月面の典型条件で解いた数値例により、電位構造と粒子集団を可視化する。最後に、外部根から上端面の電流、電位、流入、流出を決める方法と、外部根の更新を示す。

8.1 対象と仮定

座標 z を表面（壁、 $z = 0$ ）から上流へ向けてとり、上流 $z \rightarrow \infty$ の電位を 0、壁の電位を ϕ_0 とする。電場は $E = E_z = -d\phi/dz$ で、 $E > 0$ は壁から上流へ向かう。温度 T_e 、 T_i 、 T_{pe} は eV 単位で表し、電位を温度で割った量（例えば ϕ/T_e ）は無次元である。 $e > 0$ は素電荷である。モデルは次を仮定する。

1. **平面・1次元**：壁の曲率半径と凹凸の尺度が Debye 長より十分大きく、量は z だけに依存する。接線方向の速度は保存するので、法線速度 v_z の分布だけを扱う。
2. **定常**：照射とプラズマ条件の変化は、粒子がシースを横切る時間（電子で数 μs ）より十分遅い。
3. **無衝突・非磁化**：平均自由行程と Larmor 半径は Debye 長より十分長い。粒子はシース内でエネルギーを保存する。
4. **半無限の上流**： $z \rightarrow \infty$ でプラズマは準中性になり、電場は 0 に近づく。上流の入射分布は固定した物理条件であり、解の途中で入射速度や電子の drift を変更しない。
5. **吸収する壁**：壁に達した太陽風の電子とイオン、および壁へ戻った光電子はすべて吸収される。二次電子放出、後方散乱、表面伝導は含めない。BEACH のセル内で生じる二次電子は、8.8.5 節で放出源に加える。
6. **三つの粒子集団**：単一価のイオンは流体として、太陽風電子と光電子は運動論的に扱う。

表 8.1 に、本章の数値例（表 8.4）での尺度を示す。シースの厚さは Debye 長の数倍（数十 m）であり、Larmor 半径と平均自由行程はそれより桁違いに長い。イオンの入射エネルギーは電子温度の約 70 倍で、イオンは壁の電位でほとんど減速されない。

表 8.1: 数値例の条件での尺度。 $n_{i\infty} = 8.7 \text{ cm}^{-3}$ 、 $T_e = 12 \text{ eV}$ 、 $T_{pe} = 2.2 \text{ eV}$ 、磁場 5 nT とした。

量	値
太陽風電子の Debye 長 $\lambda_{D,e} = \sqrt{\epsilon_0 T_e / (e n_{i\infty})}$	8.7 m
光電子の Debye 長 $\sqrt{\epsilon_0 T_{pe} / (e n_{pe,\text{ref}})}$ ($n_{pe,\text{ref}} = 64 \text{ cm}^{-3}$)	1.4 m
電子の Larmor 半径 (12 eV、5 nT)	約 2 km
光電子の Larmor 半径 (2.2 eV、5 nT)	約 1 km
イオンの入射エネルギー $K = m_i u_i^2 / (2e)$ ($u_i = 405 \text{ km/s}$)	0.86 keV
電子が 10 m を横切る時間	約 $5 \mu\text{s}$

この形のシースは、光を受ける板と希薄プラズマの運動論的な解析 [5]、宇宙の表面上の光電子シースとダスト浮上の解析 [10]、月面の PIC 計算 [12] で調べられてきた。本モデルの粒子集団と三つの型は Zhao らの定式化に従い [21]、イオンの有限温度は Sana と Mishra の流体モデルに従う [16]。

8.2 軌道と粒子集団

8.2.1 エネルギー保存と速度領域

定常・無衝突の 1 次元 Vlasov 方程式

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{q}{m} E \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0 \quad (8.1)$$

の解は、法線方向の全エネルギー $W = \frac{1}{2} m v_z^2 + q \phi(z)$ と軌道の種類だけの関数である (Liouville の定理)。したがって、上流で入射する分布と壁で放出する分布を与えれば、各位置の分布は境界の分布をエネルギー保存で写したものになる。写せない速度、つまり境界から到達できない速度の分布は 0 である。壁は吸収するので、壁から上流へ向かう太陽風電子はなく、上流から入射する光電子もない。

電子 ($q = -e$) は $W = -e \phi(z)$ の点で折り返す。電子にとっての障壁は経路上の最小電位

$$\phi_{\min} = \min_{z \geq 0} \phi(z) = \begin{cases} \phi_m & (\text{Type A、内部の極小}) \\ 0 & (\text{Type B}) \\ \phi_0 & (\text{Type C}) \end{cases} \quad (8.2)$$

である。上流での法線エネルギーが $e T_e a^2$ (a は後述の規格化速さ) の太陽風電子は、 $a \geq b \equiv \sqrt{-\phi_{\min}/T_e}$ なら壁に達して吸収され、 $a < b$ なら障壁の手前で反射して上流へ戻る。壁での法線エネルギーが $e K$ の光電子は、 $K \geq B_{pe} \equiv \phi_0 - \phi_{\min}$ なら上流へ脱出し、それ以下なら折り返して壁へ戻る。反射する太陽風電子は極小より上流側だけを、捕捉される光電子は極小より壁側だけを往復する。このため、Type A の電荷密度は同じ電位でも極小の両側で異なる (表 8.2)。図 8.1 に、Type A の数値解で電子のエネルギー図と軌道の分類を示す。

8.2.2 太陽風電子

上流で壁へ向かう太陽風電子は、法線方向に速さ v_d で drift した Maxwell 分布である。 $v_{te} = \sqrt{2eT_e/m_e}$ 、 $u = v_d/v_{te}$ 、上流での法線の速さを $a = |v_z|/v_{te}$ とすると、上流の入射分布は

$$f_{\infty}(v_z) = \frac{N_e}{\sqrt{\pi} v_{te}} \exp[-(a - u)^2], \quad v_z < 0 \quad (8.3)$$

表 8.2: 区間ごとに存在する電子の集団。「通過」は壁へ向かう一方向、「反射」「捕捉」は往復する集団である。

区間	太陽風電子	光電子
Type A の下側（壁から極小まで）	通過	脱出、捕捉
Type A の上側（極小から上流まで）	通過、反射	脱出
Type B（全域）	通過	脱出、捕捉
Type C（全域）	通過、反射	脱出（障壁 0）

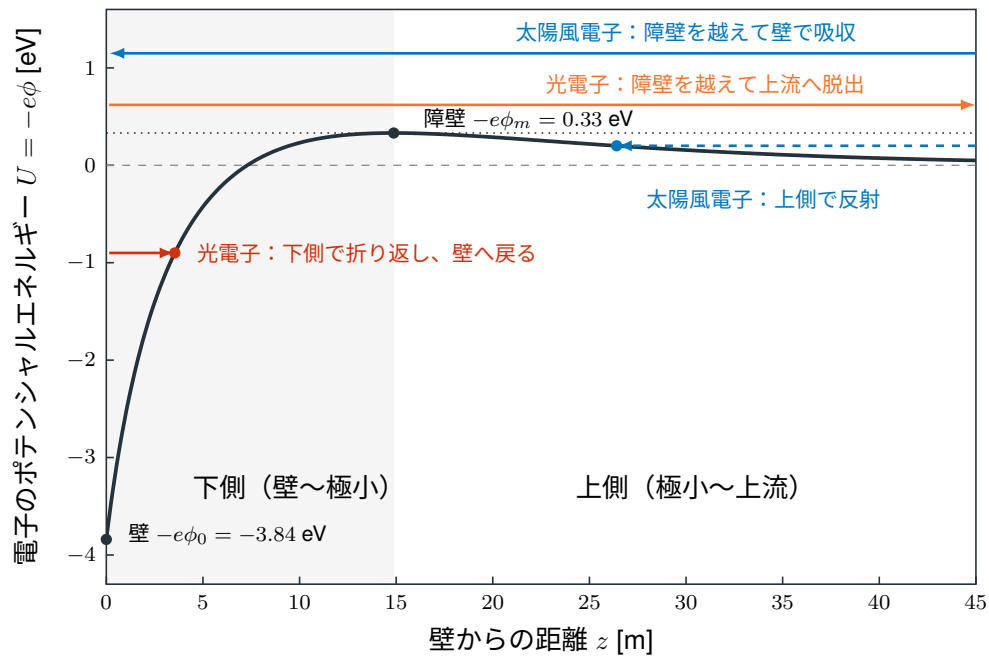


図 8.1: Type A の電子のポテンシャルエネルギー $U(z) = -e\phi(z)$ と軌道の分類。黒の曲線は図 8.6 の Type A の数値解で、色の水平線は保存する全エネルギー W の例である (W の値は説明用)。電子は $U(z) = W$ の点で折り返す。太陽風電子は $W > -e\phi_m$ なら壁に達し、そうでなければ上側で反射する。光電子は壁での法線エネルギーが $e(\phi_0 - \phi_m)$ を超えれば脱出し、それ以下なら下側で折り返して壁に戻る。この二つの閾値が、各位置に存在する速度領域を決める。

である。 N_e は入射分布の規格化であり、上流の実際の電子密度ではない。上流の太陽風電子は入射電子と反射して戻る電子の和であり、壁で吸収された高速電子は戻らないからである。位置 z での速さを $w = |v_z|/v_{te}$ 、 $\psi = \phi/T_e$ 、 $\psi_{\min} = \phi_{\min}/T_e$ とすると、エネルギー保存 $w^2 = a^2 + \psi$ と Liouville の定理から

$$f(z, v_z) = \frac{N_e}{\sqrt{\pi} v_{te}} \exp \left[- \left(\sqrt{w^2 - \psi} - u \right)^2 \right] \quad (8.4)$$

を得る。壁へ到達する通過電子は $w \geq w_c \equiv \sqrt{\psi - \psi_{\min}}$ の内向きの速度を、反射電子は $0 \leq w < w_c$ の両方向を占める。密度はこの分布の速度積分

$$n_{e,\text{pass}} = \frac{N_e}{\sqrt{\pi}} \int_{w_c}^{\infty} e^{-(\sqrt{w^2 - \psi} - u)^2} dw, \quad n_{e,\text{refl}} = \frac{2N_e}{\sqrt{\pi}} \int_0^{w_c} e^{-(\sqrt{w^2 - \psi} - u)^2} dw \quad (8.5)$$

であり、反射電子は Type A の上側と Type C だけにある。drift が 0 のとき、積分は閉じた形

$$n_{e,\text{pass}} = \frac{N_e}{2} e^{\psi} \operatorname{erfc} \sqrt{\psi - \psi_{\min}}, \quad n_{e,\text{refl}} = N_e e^{\psi} \operatorname{erf} \sqrt{\psi - \psi_{\min}} \quad (8.6)$$

になる。障壁ですべての電子が反射されるなら密度は Boltzmann 分布 $N_e e^{\psi}$ になるが、吸収壁では障壁を越えた電子が戻らないので、外向きの高速成分が欠けて密度はそれより小さい。

流束は通過電子だけが担う。 $w dw = a da$ と変数変換すると

$$\Gamma_e = \frac{N_e v_{te}}{2\sqrt{\pi}} \left[e^{-(b-u)^2} + \sqrt{\pi} u \operatorname{erfc}(b-u) \right] \quad (8.7)$$

となり、位置によらない（連続の式）。上流 $\psi = 0$ での密度は

$$n_e(0) = \frac{N_e}{2} [1 + 2 \operatorname{erf} u + \operatorname{erf}(b-u)] \quad (\text{A, C}), \quad n_e(0) = \frac{N_e}{2} (1 + \operatorname{erf} u) \quad (\text{B}) \quad (8.8)$$

である。光電子がなく drift が 0 の Type C では、上流の準中性から

$$N_e = \frac{n_{i\infty}}{1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{-\phi_0/T_e}} \quad (8.9)$$

となり、 N_e は上流のイオン密度 $n_{i\infty}$ より大きい。

8.2.3 光電子

壁は温度 T_{pe} の半 Maxwell 分布で光電子を放出する。 $v_{tp} = \sqrt{2eT_{pe}/m_e}$ 、規格化を N_{pe} とすると、壁での外向き分布は $f_w(v_z) = N_{pe} \exp(-v_z^2/v_{tp}^2)/(\sqrt{\pi}v_{tp})$ ($v_z > 0$)、放出束は $\Gamma_{\text{emit}} = N_{pe}v_{tp}/(2\sqrt{\pi})$ である。障壁 B_{pe} を越える割合が脱出し、

$$\Gamma_{\text{esc}} = \Gamma_{\text{emit}} e^{-B_{pe}/T_{pe}}, \quad \Gamma_{\text{ret}} = \Gamma_{\text{emit}} - \Gamma_{\text{esc}} \quad (8.10)$$

となる。 $\chi = (\phi - \phi_{\min})/T_{pe}$ とすると、脱出する光電子と捕捉される光電子（往路と復路の両方）の密度は

$$n_{pe,\text{esc}} = \frac{N_{pe}}{2} e^{(\phi - \phi_0)/T_{pe}} \operatorname{erfc} \sqrt{\chi}, \quad n_{pe,\text{capt}} = N_{pe} e^{(\phi - \phi_0)/T_{pe}} \operatorname{erf} \sqrt{\chi} \quad (8.11)$$

であり、捕捉された光電子は Type A の下側と Type B だけにある。Type C は障壁が 0 なので、放出した光電子はすべて脱出する。

光電子源は、法線エネルギー K の bin $[K_j, K_{j+1})$ ごとの外向き数流束 Γ_j でも与えられる。bin の中では $g_j = d\Gamma/dK = \Gamma_j/(K_{j+1} - K_j)$ を一定とする。電位 ϕ の点での法線エネルギー

は $K - q$ ($q = \phi_0 - \phi$)、速さは $v_* \sqrt{K - q}$ ($v_* = \sqrt{2e/m_e}$) なので、 $dn = g \, dK / (v_* \sqrt{K - q})$ を積分して

$$\begin{aligned} n_{\text{pe,esc}} &= \sum_j \frac{2g_j}{v_*} \left[\sqrt{K_{j+1} - q} - \sqrt{\max(K_j, B_{\text{pe}}, q) - q} \right]_+, \\ n_{\text{pe,capt}} &= \sum_j \frac{4g_j}{v_*} \left[\sqrt{\min(K_{j+1}, B_{\text{pe}}) - q} - \sqrt{\max(K_j, q) - q} \right]_+ \end{aligned} \quad (8.12)$$

を得る。 $[\cdot]_+$ は上限が下限以下のとき 0 とする意味である。脱出束は $\Gamma_{\text{esc}} = \sum_j g_j [K_{j+1} - \max(K_j, B_{\text{pe}})]_+$ で、同じ g_j を密度、流束、Poisson 方程式の積分のすべてに使う。bin の分布を Maxwell 分布へ当てはめる操作はない。8.8.5 節の外部根の更新は、この形で上端面を出た光電子のスペクトルを渡す。

8.2.4 太陽風イオン

イオンは上流で密度 $n_{i\infty}$ 、法線速度 u_i (壁向きを正)、温度 T_i を持つ流体である。連続の式 $n_i v = n_{i\infty} u_i$ と、圧力 $p = e f T_i n_i$ (係数 f は一定、1 は等温、3 は 1 次元断熱) を含む運動方程式 $m_i n_i v \, dv/dz = -dp/dz - e n_i \, d\phi/dz$ を積分すると、入射エネルギー $K = m_i u_i^2 / (2e)$ 、 $a = f T_i$ 、密度比 $r = n_i / n_{i\infty}$ に対して

$$K \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) + a \log r + \phi = 0 \quad (8.13)$$

が成り立つ [16]。 f は同論文の断熱指数 ψ に当たる。上流につながる枝は超音速の根 $2K > a$ から連続する根であり、 $a = 0$ では冷たいビーム $r = (1 - \phi/K)^{-1/2}$ に戻る。イオンが到達できる最大電位は

$$\phi_{\text{crit}} = K - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \log \frac{2K}{a} \quad (a = 0 \text{ では } K) \quad (8.14)$$

で、経路上の電位がこれを超えるとイオンの流れは途中で止まる。流束は $\Gamma_i = n_{i\infty} u_i$ で一定である。太陽風では K (405 km/s の陽子で約 0.86 keV) が T_i よりはるかに大きく、 $T_i \leq 12$ eV、 $f = 1, 3$ で根の変化は 0.1 mV 以下である。このモデルはイオンの速度分布そのものは定めない。

8.3 Poisson 方程式と電位構造

8.3.1 第一積分

電荷密度を $\rho = e(n_i - n_{e,\text{pass}} - n_{e,\text{refl}} - n_{\text{pe,esc}} - n_{\text{pe,capt}})$ とする。電位が単調な区間では存在する粒子集団が決まっているので、 ρ は ϕ だけの関数である。Poisson 方程式 $d^2\phi/dz^2 = -\rho/\epsilon_0$ に $d\phi/dz$ を掛けると $\frac{1}{2} d(E^2)/dz = -(\rho/\epsilon_0) d\phi/dz$ となり、電位について積分できる。上流で $E = 0$ の単調な区間 (Type B、C) では

$$E^2(\phi) = \frac{2}{\epsilon_0} \int_{\phi}^0 \rho(\psi) \, d\psi \quad (8.15)$$

である。これは ϕ を位置、 z を時間とみなした質点のエネルギー保存 (Sagdeev の擬ポテンシャル) と同じ形をしている。Type A では極小 ϕ_m で $E = 0$ なので、下側と上側の区間 s ごとに

$$E_s^2(\phi) = -\frac{2}{\epsilon_0} \int_{\phi_m}^{\phi} \rho_s(\psi) \, d\psi, \quad s \in \{\text{下側}, \text{上側}\} \quad (8.16)$$

となる。上側は上流でも $E = 0$ でなければならないので、接続条件

$$\int_{\phi_m}^0 \rho_{\text{上側}}(\psi) d\psi = 0 \quad (8.17)$$

が加わる。極小が存在するには $d^2\phi/dz^2 > 0$ 、つまり極小で $\rho(\phi_m) < 0$ が必要である。壁の電場は $E_0 = \pm\sqrt{E^2(\phi_0)}$ で、符号は Type A と B で正、Type C で負である。

図8.2に、Type A の数値解での $\rho(\phi)$ と $E^2(\phi)$ を示す。下側では捕捉された光電子が負の電荷を担い、 E^2 は壁に向かって単調に増える。上側の電荷密度は極小の近くで負、上流の近くで正になり、二つの面積が打ち消すことが式(8.17)である。

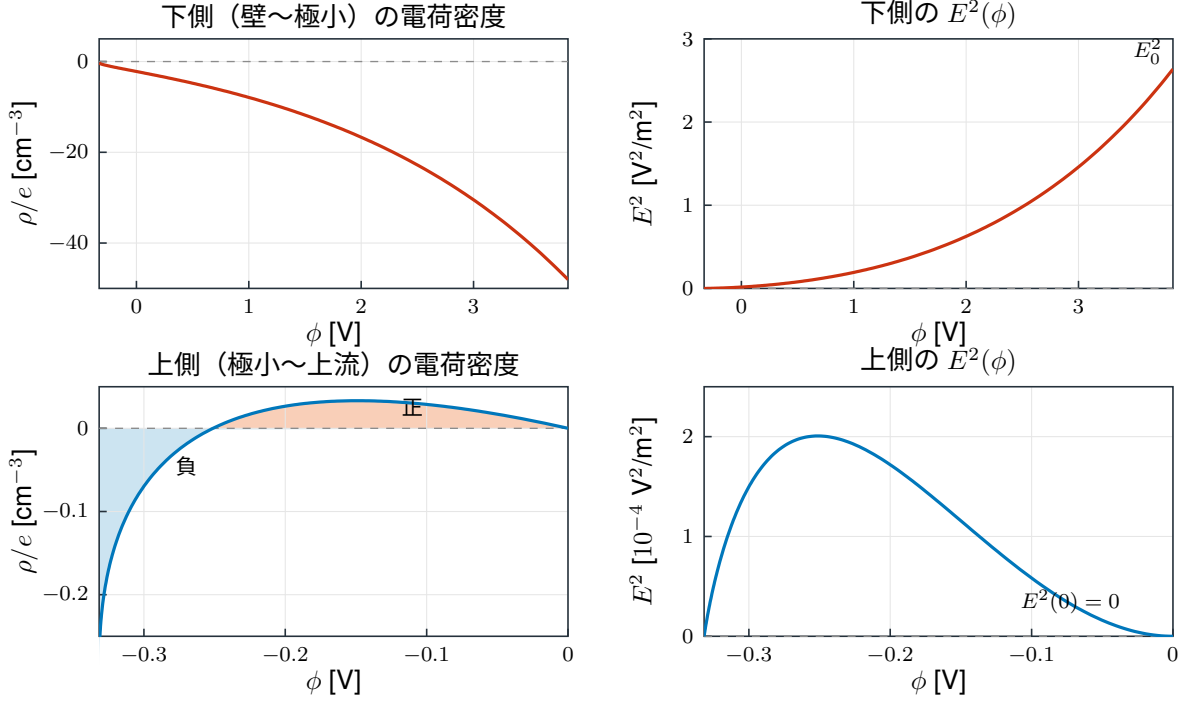


図 8.2: Type A ($\alpha = 60^\circ$) の電荷密度 $\rho(\phi)$ と第一積分 $E^2(\phi)$ 。横軸は位置ではなく電位で、上段は壁から極小まで、下段は極小から上流までの区間である。二つの区間では粒子集団が異なるため、同じ電位でも ρ が異なる。 E^2 は極小 ϕ_m で 0 から始まり、上側では上流 $\phi = 0$ で再び 0 に戻る。これは上側の電荷密度の負の面積と正の面積が打ち消すこと（式(8.17)）に等しい。 E^2 は数値求積で独立に計算した。

8.3.2 三つの型

電位の形により解は三つに分かれる [21]。Type A は $\phi_m < \min(\phi_0, 0)$ の内部極小を持つ非単調な構造、Type B は正の壁から 0 へ単調に下がる構造、Type C は負の壁から 0 へ単調に上がる構造である（図8.3）。Type A の壁電位は正とは限らず、負の壁電位を持つ Type A もある。光電子がなければ壁を正にする機構がなく、Type C だけが成り立つ。同じ条件で複数の型が候補になり得ることは Sana と Mishra が示しており [15]、本モデルは型の間の安定性による選択をしない。

8.3.3 電位分布の再構成

空間分布は第一積分から

$$z(\phi) = \int_{\phi}^{\phi_0} \frac{d\psi}{|E(\psi)|} \quad (8.18)$$

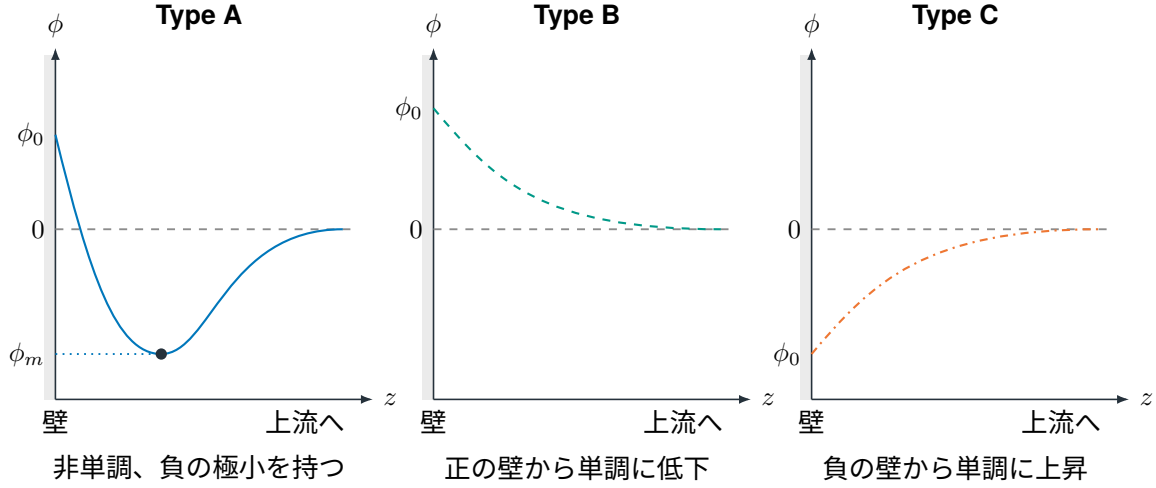


図 8.3: 外部シースの電位形状による Type A、B、C の分類。曲線は形の違いだけを示す模式図で、壁電位、距離、勾配は数値解を表していない。Type A は正の壁電位を持つ例を描いた。電子 drift による上流の帯はこの分類図に含めず、図8.4で示す。

で得る。Type A では下側の積分で極小の位置 z_m を求め、上側を z_m から積分する。極小の近くでは $E^2 \approx -2\rho(\phi_m)(\phi - \phi_m)/\epsilon_0$ なので $\phi - \phi_m \propto (z - z_m)^2$ となり、被積分関数の特異点は積分できる。上流の近くでは $\rho \approx \rho'(0)\phi$ から $E^2 \approx -\rho'(0)\phi^2/\epsilon_0$ となり、 ϕ は長さ $L = \sqrt{\epsilon_0/(-\rho'(0))}$ で指数関数的に 0 に近づく。上流までの距離は無限なので、分布は $|\phi|$ が小さな閾値に達した点で打ち切る。

8.4 閉じる条件

未知数は壁電位 ϕ_0 、Type A の極小 ϕ_m 、太陽風電子の規格化 N_e である。零電流の closure は次の条件で根を決める。

1. 上流の準中性：

$$n_{i\infty} = n_e(0) + n_{pe}(0), \quad n_{pe}(0) = \frac{N_{pe}}{2} e^{-\phi_0/T_{pe}} \operatorname{erfc} \sqrt{-\phi_{\min}/T_{pe}} \quad (8.19)$$

(bin の光電子源では式(8.12)を $\phi = 0$ で使う)。

2. 壁への零電流：電子の吸収 $J_e = -e\Gamma_e$ 、イオンの吸収 $J_i = e\Gamma_i$ 、光電子の正味の放出 $J_{\text{escape}} = e\Gamma_{\text{esc}}$ に対して

$$J_e + J_i + J_{\text{escape}} = 0 \quad (8.20)$$

である。壁へ戻る光電子は放出と相殺するので、正味には脱出分だけが残る。

3. Type A の接続：式(8.17)。

Type B、C の未知数は 2 つ、Type A は 3 つで、方程式の数と一致する。 N_e は準中性と電流の両方に線形に入る。これらは電位空間の代数方程式と積分条件であり、 z 方向の積分を含まない。太陽高度 α で照射とプラズマ流を与える場合は、Zhao らに従って

$$N_{pe} = n_{pe,\text{ref}} \sin \alpha, \quad u_i = v_{sw} \sin \alpha \quad (8.21)$$

とする。 $n_{pe,\text{ref}}$ は垂直照射での光電子の規格化、 v_{sw} は太陽風の速さである。電子の drift は、太陽風の法線速度 $v_d = v_{sw} \sin \alpha$ と $v_d = 0$ を物理条件として明示的に選ぶ (8.5.2節)。

零電流のほかに二つの閉じ方がある（表8.3）。境界電場を指定する closure は、式(8.20)の代わりに $E^2(\phi_0) = E_H^2$ と電場の符号を課し、電流を結果として返す。 N_e は準中性で決まるので、 E_H を変えると N_e も変わる。 $E_H = 0$ は平坦な解だけでなく、非平坦な Type B、C の根も含む。静的な評価は、与えた電位で準中性から N_e を求め、符号付きの $E^2(\phi_0)$ 、Type A の接続の残差、各電流を返す。外側の時間発展や結合方程式は呼び出し側が解き、その結果を物理解の判定にかける。

表 8.3: 外部シースの閉じ方と未知数。いずれも同じ密度、流束、第一積分、物理解の判定を使う。

閉じ方	固定する量	決める量
零電流	上流のイオン、電子温度と drift、光電子源	ϕ_0 、 ϕ_m 、 N_e 、各電流
境界電場の指定	上記と E_H	ϕ_0 、 ϕ_m 、 N_e 、正味の電流
静的な評価	上記と ϕ_0 (と ϕ_m)	N_e 、符号付きの $E^2(\phi_0)$ 、接続の残差、各電流

8.5 物理解の条件

代数方程式の根であることと、上流から壁まで実数の電位分布がつながることは別の条件である。根は次をすべて満たすときだけ受理する。

1. **イオンの到達**：経路上の最大電位 $\max(\phi_0, 0)$ が式(8.14)の ϕ_{crit} 以下である。
2. **実数の電場**：全区間で $E^2(\phi) \geq 0$ であり、Type A では極小で $\rho < 0$ 、接続条件(8.17)が満たされる。
3. **上流での漸近**：上流の近くでも $E^2 \geq 0$ が保たれる。

8.5.1 上流の漸近条件

上流の近くで ρ が ϕ について滑らかなら、 $E^2 \approx -\rho'(0)\phi^2/\epsilon_0 \geq 0$ から $d\rho/d\phi \leq 0$ が必要である。冷たいイオンと Boltzmann 電子では、これは Bohm の条件 $u_i \geq \sqrt{eT_e/m_i}$ に一致する [14]。本モデルでは入射速度を Bohm 速度へ補正せず、指定した入射状態でこの条件が成り立つかを判定する。

上流の分布が速度 0 で切れている場合、 ρ は滑らかでない。Type B ($\phi > 0$) では通過電子の下限速度 $\sqrt{\psi}$ と捕捉光電子のために $\rho/e = C\sqrt{\phi} + O(\phi)$ となり、Maxwell の光電子源では

$$C = \frac{N_e e^{-u^2}}{\sqrt{\pi T_e}} - \frac{N_{pe} e^{-\phi_0/T_{pe}}}{\sqrt{\pi T_{pe}}} \quad (8.22)$$

である。式(8.15)から $E^2 \approx -4eC\phi^{3/2}/(3\epsilon_0)$ なので、 $C \leq 0$ が必要である。bin の光電子源では第 2 項を $2(2g_- - g_+)/v_*$ に置き換える。 $g_{\mp}$ は $K = \phi_0$ の左右の bin の値で、戻る軌道と脱出する軌道が別の側の値を使う。この条件は有限個の点での検査では見逃し得るので、係数で判定する。

8.5.2 電子 drift と上流の帯

上流で壁へ向かう電子の分布を、規格化した速さ a の関数 $g(a) = N_e e^{-(a-u)^2}/\sqrt{\pi}$ と書く。Type A の上側と Type C で上流から深さ $h = -\phi/T_e$ の点では、遅い電子は両方向に存在するので、

密度の変化は

$$n_e(h) - n_e(0) = 2 \int_0^\infty \left[g(\sqrt{w^2 + h}) - g(w) \right] dw + O(h) \approx g'(0) \frac{h}{2} \log \frac{1}{h} + O(h) \quad (8.23)$$

となる。drift のない Maxwell 分布は $g'(0) = 0$ でこの項を持たないが、drift のある分布は $g'(0) = 2u g(0) > 0$ なので、上流に近づくほど電子の過剰が $h \log(1/h)$ で現れる。イオンと光電子の密度は ϕ について滑らかなのでこれを打ち消せず、上流電位に接する帯 $\phi_b < \phi < 0$ で $E^2 < 0$ になる。 $E^2 < 0$ の区間には実数の $z(\phi)$ がないので、厳密な半無限の上流条件のもとでは、drift のある Type A、C の根は物理解にならない。この上流分布は $v_z = 0$ に尖った極小を持ち、Penrose の条件 [11] では drift の大きさによらず運動論的に不安定である。実際には緩和や散乱で滑らかになると考えられ、遅い入射電子の drift だけを除いて $g'(0) = 0$ にすると帯は消える。

帯の内側で E^2 が負になる量から、場の不足

$$E_{\text{def}} = \sqrt{-\min_{\phi_b < \phi < 0} E^2(\phi)} \quad (8.24)$$

を定める。これは、静電シースが上流へつながるために外から供給されなければならない電場である。drift のある根は、帯の電位幅が $|\phi_m|$ (A) または $|\phi_0|$ (C) の指定した割合以下であるか、 E_{def} が指定した外部の場のレベル E_{floor} 以下であるときに受理できる。後者は、上流境界を $E = 0$ の無限遠ではなく、場が外部のレベルまで下がった点に置くことに当たる。どちらの判定も根の方程式を変えないので、受理した根の壁側の量は判定の仕方によらない。帯より外側だけを物理的な電位分布として使い、分布の再構成も帯の手前で打ち切る。図8.4に、drift の有無による上流付近の E^2 の違いを示す。BEACH での判定の選び方は8.8.3節で述べる。

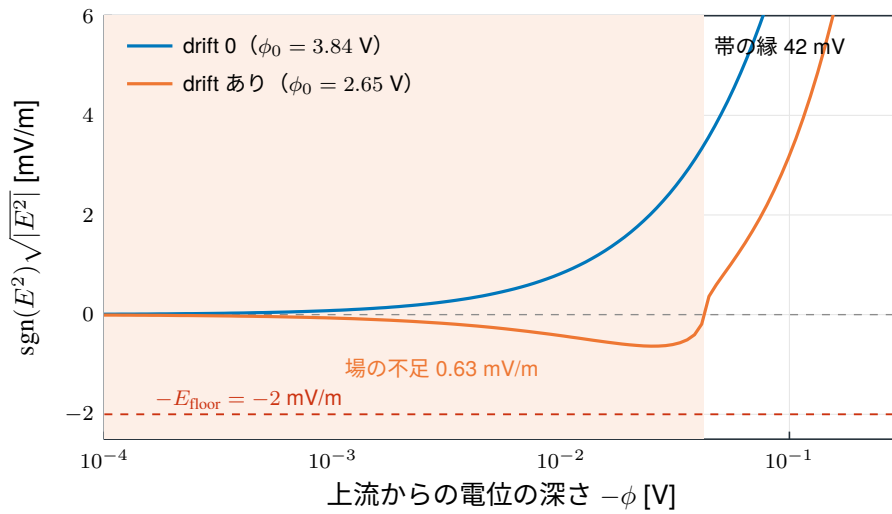


図 8.4: Type A ($\alpha = 60^\circ$) の上側の区間で、上流 $\phi = 0$ の近くの $E^2(\phi)$ 。縦軸は符号を保った $\sqrt{|E^2|}$ 、横軸は上流からの電位の深さ（対数）である。電子 drift 0 の根は $E^2 \propto \phi^2$ で 0 に近づく。太陽風の法線速度で drift した電子では、 $h \log(1/h)$ 項（式(8.23)）によって上流に接する帯（橙の網掛け）で $E^2 < 0$ になる。帯の中の最小値の大きさが場の不足であり、この例では下限 $E_{\text{floor}} = 2 \text{ mV/m}$ を下回るので根を受理する。drift の有無で根そのもの（ ϕ_0 、 ϕ_m ）も変わる。

8.6 数値アルゴリズム

図8.5に、一つの型について零電流根を求める手順を示す。

8.6.1 規格化と未知数の変換

電位は光電子温度 T_{pe} (bin の光電子源では T_e 以下の最大の 2 の冪) で、密度は上流のイオン密度で規格化する。2 の冪を使うのは、規格化の往復で bin の端の値が丸め誤差で動かないようにするためである。未知数は符号と順序を保つ対数変数に変換する。Type A は $(\log[(\phi_0 - \phi_m)/T], \log[-\phi_m/T], \log[N_e/n_{i\infty}])$ 、Type B、C は $(\log[|\phi_0|/T], \log[N_e/n_{i\infty}])$ を使い、 $\phi_m < \min(\phi_0, 0)$ や $N_e > 0$ を反復の途中でも保つ。Type A の接続の残差は $n_{i\infty}(-\phi_m/T)^{3/2}$ で割る。浅い極小では積分区間と其中的の電荷密度がともに小さくなり、規格化しなければ極小が浅いだけで残差が収束したように見えるからである。

8.6.2 根の探索

根は保護付き Newton 法で求める。Jacobian は中心差分 (定義域の端では片側差分) で作り、Newton 方向に沿って残差の最大ノルムが減るまで歩幅を半分にする。減らせなければ減衰係数を増やしながら Levenberg–Marquardt 方向を試す。定義域外の試行点は評価せずに退け、元の方程式の残差がすべて 10^{-10} 以下になったときだけ収束とみなす。歩幅が小さくなったことや、最小二乗の停留点に達したことは収束と扱わない。

初期値は、呼び出し側が与えた前回の根、近い条件の根を記録した解の表からの予測、既定の多点初期値の順に試す。Type B、C では既定の初期値の前に、次の一変数の探索も行う。既定の初期値は、温度と密度で無次元化した電位の候補の組であり、 N_e は準中性が N_e について線形であることから決める。 N_e を電流の式で消去すると ϕ_0 だけの方程式になるので、対数と線形の格子で符号変化を探し、二分法で根を求める。近い条件の根から目標の条件まで物理条件を少しずつ動かす継続法も使え、擬弧長の継続では単純な折り返しを越えられる。複数の根を列挙するときは、見つけた根から反発する deflation で新しい根を探し、元の方程式と物理解の判定に合格したものだけを残す。型を指定しない場合は、太陽高度が 20° 未満なら C、A、B、それ以外は A、B、C の順に試し、最初に受理した根を返す。いずれも有限個の初期値と反復による探索であり、根が見つからないことは物理解の不存在を意味しない。

8.6.3 物理解の判定の離散化

収束した根について、まずイオンの到達と Type A の接続を確かめる。次に各区間で等間隔の 129 点の電位で E^2 を評価し、規格化した E^2 の尺度の 10^{-8} 倍を超える負の値があれば棄却する。Type B の漸近条件は式(8.22)の係数で判定し、丸め誤差に 128 倍の機械精度の余裕を与える。drift のある Type A、C では、上流へ向けて $\phi = -\phi_{ref}2^{-j}$ ($j = 1, \dots, 48$) の点を加えて帯を見つけ、二分法で帯の縁 ϕ_b を決めて、その幅と場の不足を受理の条件と比べる。下側の区間には帯を許さない。有限個の点での判定なので、任意の条件に対する存在定理ではない。

8.6.4 速度積分と電位積分

drift が 0 の電子密度は式(8.6)の閉じた形で計算し、 $e^\psi \operatorname{erfc}$ の積はスケールした相補誤差関数 $e^{x^2} \operatorname{erfc} x$ で評価して桁あふれを避ける。drift があるときは、速度積分の区間を $w = w_{lo} + (w_{hi} - w_{lo})t^2$ で変換し、端点の平方根特異性を除いて複合 Gauss–Legendre 求積で積分する。速度の上限は drift または切断速度から熱速度の 10 倍先で打ち切る。

第一積分の電位積分は $\phi = \phi_{lo} + (\phi_{hi} - \phi_{lo}) \sin^2(\pi t/2)$ で両端に点を集めた複合 Gauss–Legendre 求積で行う。bin の光電子源の密度の電位積分は $3/2$ 乗の差として解析的に求め、平方根の差は有理化し、 $3/2$ 乗の差は bin 幅と電位の区間で因数分解して評価する。狭い bin や隣り合う浮動小数点数の電位で、近い数の引き算による桁落ちを避けるためである。

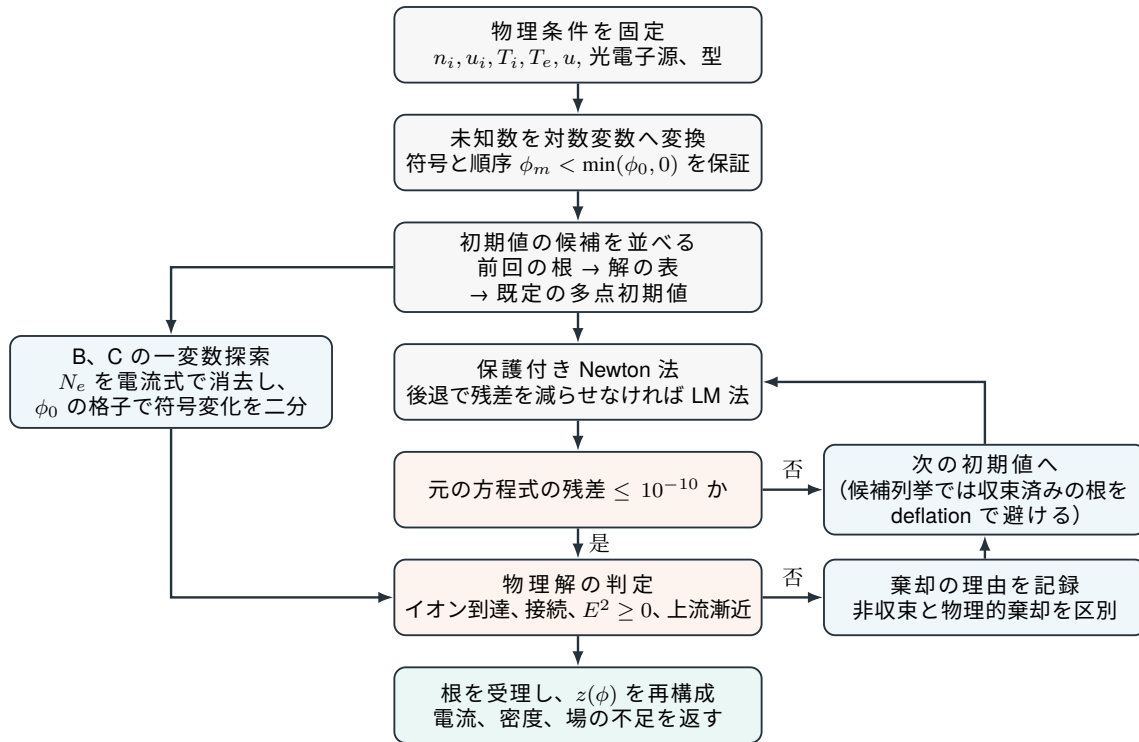


図 8.5: 一つの型について零電流根を求める手順。橙の箱が受理の判定である。代数方程式が収束したことと、半無限の物理的な電位分布が存在することを別々に判定する。型を指定しない場合はこの手順を型の順に繰り返し、最初に受理した根を返す。有限個の初期値と反復で探するため、見つからないことは解の不存在を意味しない。

8.6.5 電位分布の再構成

Type B, C では、上流から壁へ $\phi = \phi_0(1-t)^2$ で点を取り、電荷密度の台形積分で E^2 を、 $1/|E|$ の台形積分で z を求める。Type A では極小のすぐ外側から両方向へ点を取り、最初の区間だけ極小近くの 2 次の漸近形で距離を与えてから積分する。上流側は $|\phi|$ が $10^{-3}T_{pe}$ (帯がある場合は帯の縁の少し外側) に達した点で止め、その先に人工的な 0 V の区間を付け足さない。密度、流束、速度分布は、再構成した電位から式(8.5)–(8.12)で直接評価する。このため、表示用の格子の粗さは流束の値に入らない。

8.7 数値例

本節の図は、表 8.4 の条件で外部シースモデルを解いた数値解である。電子の drift は図 8.4 を除いて 0 とし、零電流で閉じた。BEACH の表面帯電計算は含まない。

8.7.1 三つの型の電位構造

図 8.6 は、同じプラズマ条件で太陽高度を変え、Type A, B, C をそれぞれ指定して解いた電位と電場である。 $\alpha = 60^\circ$ の Type A は壁電位 3.84 V、壁から 14.9 m に -0.33 V の極小を持つ。壁の電場は 1.6 V/m で、極小より上流では向きが反転する。 $\alpha = 20^\circ$ の Type B は 1.62 V の壁から光電子の Debye 長程度で減衰し、 $\alpha = 10^\circ$ の Type C は -4.24 V の壁から太陽風電子の Debye 長程度でゆっくり 0 V に近づく。Type A の上側の電場は 0.01 V/m 程度で、壁近くの電場より 2 桁小さい。

表 8.4: 数値例の条件。太陽高度 α は図ごとに示す。

量	値
上流のイオン密度 $n_{i\infty}$ (陽子)	8.7 cm^{-3}
太陽風電子の温度 T_e	12 eV
イオン温度 T_i	0 (冷たいビーム)
光電子の温度 T_{pe}	2.2 eV
垂直照射での光電子の規格化 $n_{pe,ref}$	64 cm^{-3}
太陽風の速さ v_{sw}	468 km/s
法線速度と光電子源	式(8.21)
電子の drift	0 (図8.4では $v_{sw} \sin \alpha$)

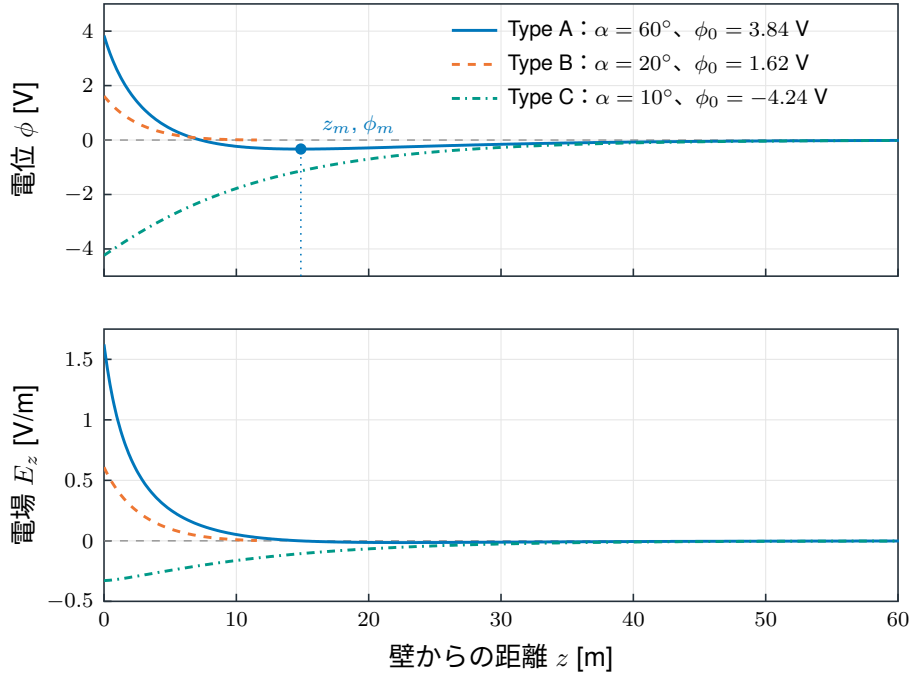


図 8.6: 零電流条件で解いた Type A、B、C の電位と電場。条件は表8.4で、型ごとに太陽高度 α を変えた。Type A は $z_m \approx 14.9$ m に負の極小 $\phi_m = -0.332$ V を持ち、極小の手前で電場の向きが反転する。Type B は Debye 長 $\lambda_{D,pe} \approx 1.4$ m 程度で減衰し、Type C は太陽風電子の Debye 長 $\lambda_{D,e} \approx 8.7$ m 程度でゆっくり 0 V に近づく。電場 drift は 0 とした。曲線は $|\phi|$ が 2.2 mV ($10^{-3}T_{pe}$) に達した点で止め、その先に 0 V の線を補っていない。

8.7.2 粒子集団と速度分布

図8.7は、Type A の粒子集団ごとの密度である。壁の近くでは捕捉された光電子が約 50 cm^{-3} あり、イオン密度の約 6 倍の負電荷が壁の正電位を遮蔽する。捕捉光電子は極小で 0 になり、その上流側は反射した太陽風電子に置き換わる。上流では通過電子 4.0 cm^{-3} 、反射電子 1.8 cm^{-3} 、脱出した光電子 2.8 cm^{-3} の和がイオン密度 8.7 cm^{-3} と釣り合う。このとき規格化 $N_e = 9.9 \text{ cm}^{-3}$ は実際の上流の太陽風電子密度 5.9 cm^{-3} と異なる。壁への数流束は太陽風電子 5.6×10^{12} 、イオン 3.5×10^{12} 、脱出光電子 $2.1 \times 10^{12} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ で、 $\Gamma_e = \Gamma_i + \Gamma_{\text{esc}}$ が成り立つ。放出した光電子の 85% は障壁で戻され、脱出は 15% である。Type B ($\alpha = 20^\circ$) では脱出が 48%、Type C では障壁がないので 100% になる。

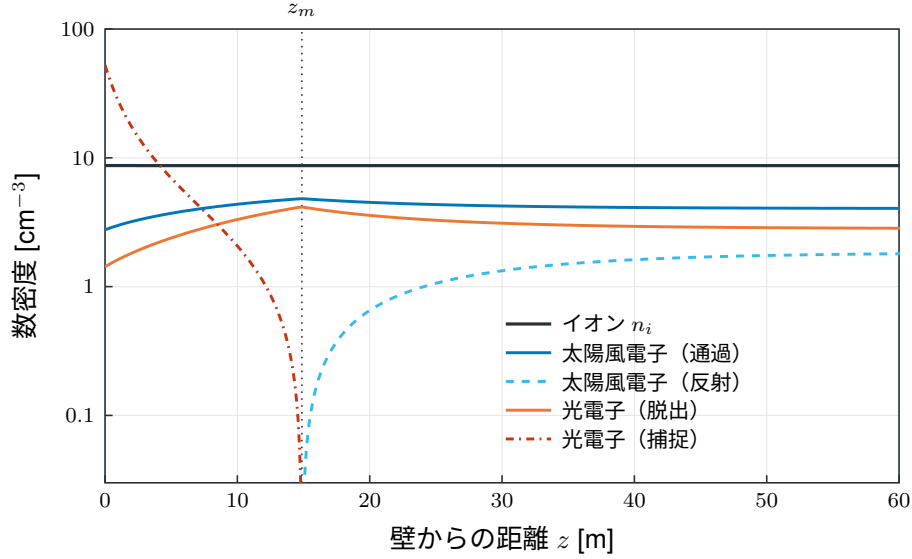


図 8.7: Type A ($\alpha = 60^\circ$) の粒子集団ごとの数密度。縦軸は対数で、点線は電位極小の位置 z_m である。反射した太陽風電子は極小より上流側だけに、捕捉された光電子は極小より壁側だけに存在する。壁の近くでは捕捉された光電子が負電荷を担い、上流では通過・反射電子と脱出光電子の和がイオン密度と釣り合う。各密度は電位から速度積分で直接求めた値であり、粒子の標本ではない。

図8.8は、同じ解の電子の法線速度分布である。分布は境界の Maxwell 分布をエネルギー保存で写したもので、壁では太陽風電子は障壁を越えた高速の内向き成分だけ、光電子は外向きの成分だけを持つ。下側では捕捉光電子が低速の両方向を占め、上側では反射電子が同じ速度領域を占める。分布の切れ目は表8.2の集団の境界に対応する。

8.7.3 太陽高度への応答

図8.9は、太陽高度を 1° から 89° まで変えたときの零電流根である。高度が下がると光電子の放出 $N_{\text{pe}} \propto \sin \alpha$ とイオンの流束 $\propto \sin \alpha$ がともに減り、壁電位が下がる。この条件では、Type C は $\alpha = 5\text{--}11^\circ$ 、Type A と B は $\alpha \geq 12^\circ$ と $\alpha \geq 11^\circ$ で見つかった。Type A の極小は高度が下がると深くなり、 $\alpha = 12^\circ$ では $\phi_0 = -1.73 \text{ V}$ 、 $\phi_m = -1.79 \text{ V}$ と壁電位に近づいて Type C へ移る。同じ高度で A と B が両方見つかる範囲では、B の壁電位が A より高い。 $\alpha \leq 4^\circ$ で根が見つからないのは、イオンの法線速度 $u_i = v_{\text{sw}} \sin \alpha$ が Bohm 速度の目安 $\sqrt{eT_e/m_i} \approx 34 \text{ km/s}$ を下回り、上流の漸近条件を満たせないためと考えられる。下段の数流束は、太陽風電子の吸収がイオンの吸収と光電子の脱出の和と釣り合うことを示す。

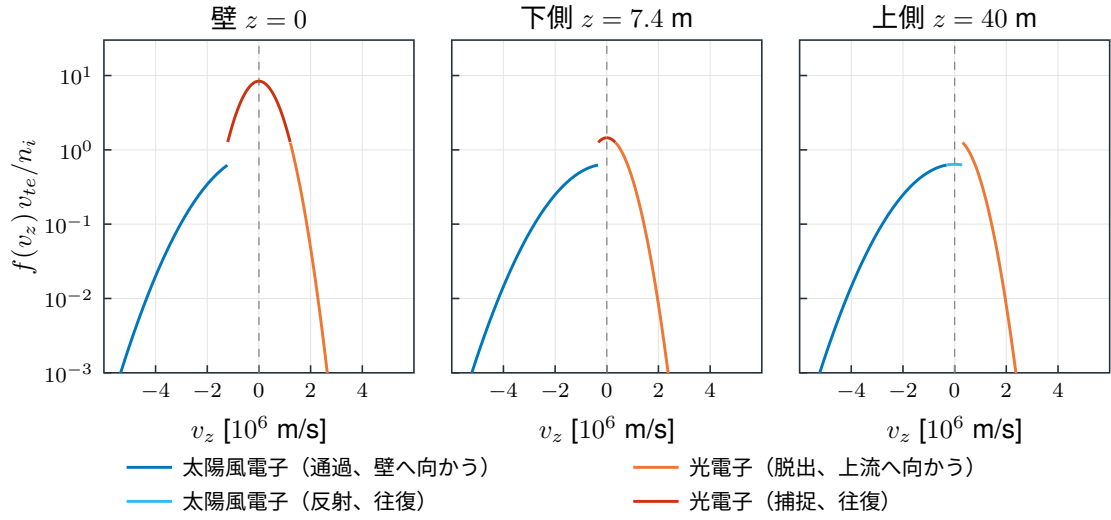


図 8.8: Type A ($\alpha = 60^\circ$) の電子の法線速度分布 $f(v_z)$ 。 $v_z > 0$ は上流向きで、縦軸は対数、 $v_{te} = \sqrt{2eT_e/m_e}$ と上流イオン密度 n_i で規格化した。分布は上流の Maxwell 分布と壁の半 Maxwell 分布をエネルギー保存で写したもので、到達できない速度で 0 になる。壁では太陽風電子は $v_z < 0$ だけ、光電子は $v_z > 0$ だけを持つ。下側では捕捉光電子が $|v_z|$ の小さい領域を両方向に占め、上側では反射電子が同じ役割を担う。

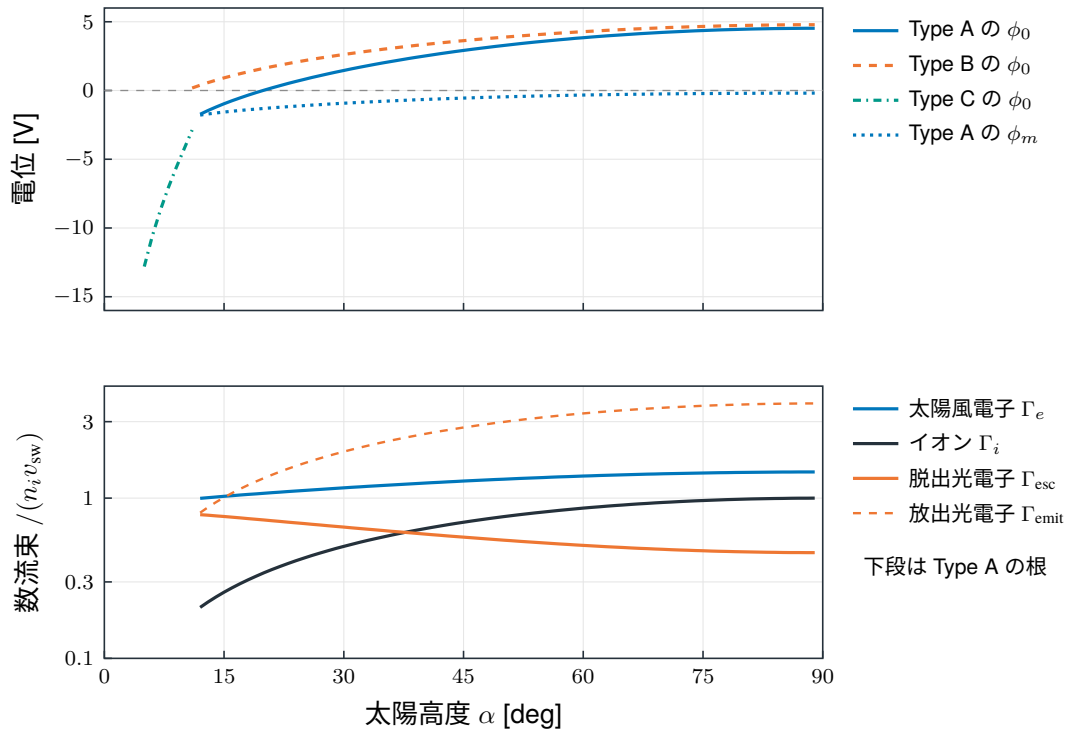


図 8.9: 太陽高度 α を 1° 刻みで変えたときの零電流根。上段は壁電位 ϕ_0 と Type A の極小 ϕ_m 、下段は Type A の根での壁への数流束である。各型を個別に指定し、直前の高度の根を初期値に加えて解いた。曲線の切れ目は、有限の探索で物理解が見つからなかった高度である（不在の証明ではない）。下段では $\Gamma_e = \Gamma_i + \Gamma_{esc}$ が零電流条件を表し、放出の大部分は壁へ戻る。

8.7.4 型の分布

図8.10は、太陽高度と光電子源の強さの平面で、零電流の物理解が見つかった型である。光電子源が弱いと太陽高度が低いと Type C だけが見つかり、壁は負に帯電する。光電子源が強くなると、B と C が同時に見つかる狭い帯を経て、A と B が同時に見つかる広い領域に移る。この計算の範囲では、A だけ、または B だけが見つかる点はなかった。 $\alpha \leq 4^\circ$ では光電子源の強さによらず根が見つからず、境界は前節の Bohm 速度の目安と一致する。複数の型が見つかる条件では、本モデルはどれが実現するかを決めない。研究で外部シースを使うときは、型を明示して結果の依存性を確かめる必要がある。

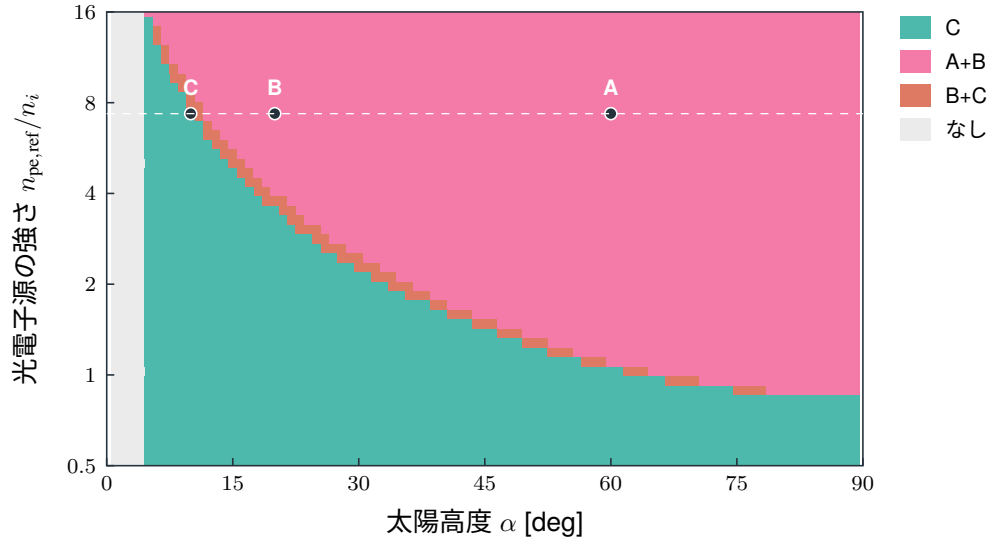


図 8.10: 太陽高度 α と光電子源の強さ $n_{pe,ref}/n_i$ の平面で、零電流の物理解が見つかった型。格子は 89×49 点で、各点で A、B、C を個別に指定し、既定の初期値だけから解いた。他の条件は表8.4と同じで、白い破線と点は図8.6の例の位置である。「A+B」などは同じ条件で複数の型が見つかったことを表し、色は解の安定性による選択を表さない。「なし」は有限の探索で物理解が見つからなかった点で、解の不存在を保証しない。

8.8 BEACH の上端面への接続

8.8.1 外部領域を縮約する条件

BEACH の場合は表面電荷に由来し、内側の体積プラズマ空間電荷を含まない。太陽風中の表面を扱う周期セルでは、セルの高さ（例えば 1 mm）が Debye 長 ($n = 8.7 \text{ cm}^{-3}$, $T_e = 12 \text{ eV}$ で約 9 m) よりはるかに小さい。このとき外部のシースから見ると、箱の上端面 $z = H$ は厚さ 0 の壁であり、外部領域を平面・定常のシースに縮約して、その解から上端面での条件を与えることができる。これは空間尺度 ($H \ll \lambda_D$) と時間尺度（外部シースの応答が表面の帯電時間より速い）の仮定であり、シースを接続すれば任意の局所 geometry が妥当になるわけではない。

外部のシースは本章のモデルで解き、その零電流根から上端面に次の 4 つを与える。粒子種ごとの電流（各バッチの吸収・放出・脱出の目標電荷）、壁電位 ϕ_0 （上端面の平均電位の基準）、障壁電位（入る粒子の選別と出る粒子の反射・脱出の判定）、太陽風電子の規格化 N_e （上端面から入れる電子の密度）である。

8.8.2 外部根の条件と型の選択

外部根は、8.4節の零電流の closure (式(8.19)、(8.20)、(8.17)) の根である。BEACH は計算の開始時にこの根を一度解き、外部根を更新する場合 (8.8.5節) は光電子源を置き換えて解き直す。根は型、壁電位 ϕ_0 、極小 ϕ_m (Type A)、規格化 N_e 、粒子種ごとの電流を与え、物理解の判定 (8.5節) に合格した根だけを使う。

外部根に渡す物理条件は、箱の中の粒子種と揃える。太陽風電子は、イオンと同じ太陽風の法線速度で drift した Maxwell 分布とする。イオンの温度には箱の中に注入するイオンと同じ値を用い、流体の圧力係数 f (式(8.13)) は既定で等温の 1 とする。光電子の規格化は、式(8.21)に倍率 s_{UV} を掛けた $N_{pe} = s_{UV} n_{pe,ref} \sin \alpha$ である。

型を指定しない場合は、太陽高度が 20 度未満なら C、A、B、それ以外は A、B、C の順に試し、成り立つ最初の根を採用。8.7節の数値例 (図8.10) のように、同じ条件で複数の型が見つかることがある [15]。この順序は安定性による選択ではないので、研究では型を明示して結果の依存性を確認する。

8.8.3 電子 drift と場の下限

8.5.2節で示したように、電子が太陽風の法線速度で drift すると、Type A と C には上流電位に接する帯で $E^2 < 0$ になる (図8.4)。電位分布は帯の縁 ϕ_b (表8.5の 1 行目の条件で約 -42 mV、上端面から約 $3\lambda_D$) で傾き 0 になって止まり、残りの数十 mV を 1 次元静電モデルだけでは埋められない。

BEACH は、帯の内側の場の不足 E_{def} (式(8.24)) が外部の場のレベル E_{floor} 以下の根を受理する。これは上流境界を「 $E = 0$ の無限遠」から「場が外部レベルまで落ちた点」に置き換えることに相当する。太陽風は運動電場 $|\mathbf{u} \times \mathbf{B}|$ (400 km/s、5 nT で約 2 mV/m) を持ち、磁場による旋回混合、密度揺らぎ、運動論的不安定性もこの桁の場で効くので、1 次元静電シースにこれ以下の場を決める資格はない。求めた不足を表8.5に示す。この判定は根の値を変えず、根を使うかどうかだけを決める。帯の電位幅を $|\phi_m|$ (A) または $|\phi_0|$ (C) と比べて判定しても、受理する根は同じ代数根であり、壁側の量は変わらない。

表 8.5: 上流の帯の幅と場の不足。1 次元定常シースの数値解から求めた値。

条件	型	帯の幅	場の不足
$n = 8.7 \text{ cm}^{-3}$ 、 $T_e = 12 \text{ eV}$ 、405 km/s、 $\alpha = 60^\circ$ 、光電子あり	A	42 mV	0.63 mV/m
同、光電子なし	C	1.8 mV	0.03 mV/m
$n = 5 \text{ cm}^{-3}$ 、 $T_e = 10 \text{ eV}$ 、400 km/s、光電子 $4.5 \mu\text{A/m}^2 \cdot 2.2 \text{ eV}$	A	52 mV	0.67 mV/m

電子の drift を 0 にすれば帯は消えるが、面を一方方向に横切る電子の束が $e^{-u^2} + \sqrt{\pi} u (1 + \text{erf } u)$ 倍 ($u = 0.21$ で 1.42 倍) 変わり、零電流の根ではその差が電位に現れる。表の 3 行目の条件で、drift 0 の根は A で ϕ_0 が 6.04 V から 7.05 V、C で -7.34 V から -4.63 V に移った。遅い入射電子だけ drift を除いて滑らかにした軌道整合の解との差が数十 mV であることと比べ、drift を無視する誤差の方がはるかに大きいので、BEACH は帯を受理する方法で drift を扱う。受理した根の壁側の量の不確かさは数十 mV である。

帯が問題にするのは、壁の系で $|v_z| \lesssim 0.07 v_{te}$ (約 150 km/s、1 eV 以下) の遅い電子である。1 次元静電モデルが落としている次の物理は、この集団に対しては支配的になり得る。表8.1の条件では、遅い電子が帯の領域 ($3 \sim 7\lambda_D$ 、30~60 m) を通る時間は 0.2~0.4 ms で、その間に電子サイクロトロン運動 (周期 7 ms) で 0.2~0.35 rad 旋回する。磁場が法線に垂直な成分を持てば、垂直速度の一部が v_z に回って数百 km/s 変わり、 $v_z \approx 0$ の尖りの幅を超える。数~10% の密度揺らぎは $T_e \delta n/n \approx 0.1 \sim 1$ V の電位揺らぎに相当し、帯の幅 (数十 mV) はその下に埋まる。 $v_z = 0$ に尖った分布は Penrose の条件を破り、準線形拡散で平坦化する。また磁力線が昼側の表面に接続している時間は天体の半径と太陽風速度の比 (月で約 4 s) であり、半無限

の定常な鏡像集団は溜まらない。どの機構が主であるかは観測で確かめられていない。 E_{floor} は、これらの外側の物理が効き始める場の大きさとして読む。

8.8.4 上端面への写像

太陽風電子、イオン、光電子の3つの粒子種は、固定電流 closure (第7章) を使う。ambient electron 吸収 $J_e < 0$ 、ion 吸収 $J_i > 0$ 、光電子放出 $J_{\text{emit}} > 0$ 、再吸収 $J_{\text{return}} \leq 0$ 、escape の表面寄与 $J_{\text{escape}} > 0$ とすると

$$J_{\text{return}} = J_{\text{escape}} - J_{\text{emit}}, \quad (8.25)$$

$$J_e + J_i + J_{\text{return}} + J_{\text{emit}} = 0 \quad (8.26)$$

が式(8.20)から従う。各バッチで、追跡で得た吸収・放出・帰還の分布を、根の電流にバッチ幅を掛けた目標電荷へ一律の倍率で合わせる。放出と帰還は別々の倍率で合わせ、二つの大きな電流の差である光電子の正味電流を倍率の分母に使わない。表面の総電荷は浮遊条件に拘束され、要素ごとの分布だけが追跡で決まる。escape 電流は外へ運ばれる電子電荷に対応し、表面へ deposit しない。

2軸周期場では、零モードの gauge (第4章) を上端面 ($z = H$, ϕ_0) に置き、上端面の水平平均電位を壁電位 ϕ_0 に合わせる。真空中で定数を足すだけなので、セル内の電位差と軌道は変わらず、電位の値が上流 0 V を基準にした値になる。流入の写像と外部障壁の判定はこの電位を前提にするので、零モードを非零モードから分けて Gauss 則で閉じる周期場が必要である。零モードを分けられない有限画像だけの場では上端面の電位が 0 V 付近に留まり、流入する電子は減速されず、光電子は浅すぎる障壁で判定される。平板の試験計算 (8×8 要素、20 バッチ) では、零モードを分けた場合に平面の平均電位が根の ϕ_0 と 0.1 mV 以内で一致し、固定電流の倍率は全ての経路で統計誤差の範囲で 1 であった。分けない場合は電子の倍率が 0.53 (Type C)、光電子の帰還と escape の倍率が 1.99 と 0.30 (Type A) にずれた。

流入は、上流 0 V の分布から外部の障壁と上端面の両方に届く部分だけを選び、法線速度をエネルギー保存で写す。

$$\frac{1}{2}mv_{n,f}^2 = \frac{1}{2}mv_{n,\infty}^2 - q\phi_f \quad (8.27)$$

ϕ_f はバッチ開始時の上端面の平均電位である。電子は規格化 N_e (光電子なしの Type C では式(8.9)) の分布から、イオンは上流の n_i で入れる。流束は上流の分布を同じ下限で切った一方向の束であり、特性曲線に沿って保存するので、入れた電子の束は根の電子電流と一致し、電子の倍率は統計誤差の範囲で 1 になる。

上端面を外向きに横切った電子、光電子、二次電子は、横切った点の電位 ϕ_c と法線運動エネルギーで、外部の障壁を越えられるかを判定する。障壁は Type A の電子・光電子・二次電子が ϕ_m 、Type B、C と全てのイオンが 0 V である。越えられない粒子は法線速度を反転して戻す。 x, y 周期のセルでは、外部での横移動 (飛行時間と接線速度の積で m 程度) がセル幅よりはるかに大きいので、戻す位置を上端面内で一様に選び直し、戻す位置の電位 ϕ_r で法線運動エネルギーを合わせて全エネルギーを保つ。

$$\frac{1}{2}mv_{n,r}^2 = \frac{1}{2}mv_{n,c}^2 + q(\phi_c - \phi_r) \quad (8.28)$$

右辺が 0 以下になる遅い粒子は横切った位置へ戻す。外部での折り返し点までの距離と飛行時間は追わない。図8.11に、外部根から渡す条件と、8.8.5節の光電子統計による根の更新を示す。

8.8.5 外部根の更新

セル内の凹凸は、外部シースから見た表面の放出を変える。表面から出た光電子の一部はセル内で再吸収されるので、上端面を出る光電子は放出より少なく、エネルギー分布も変わる。

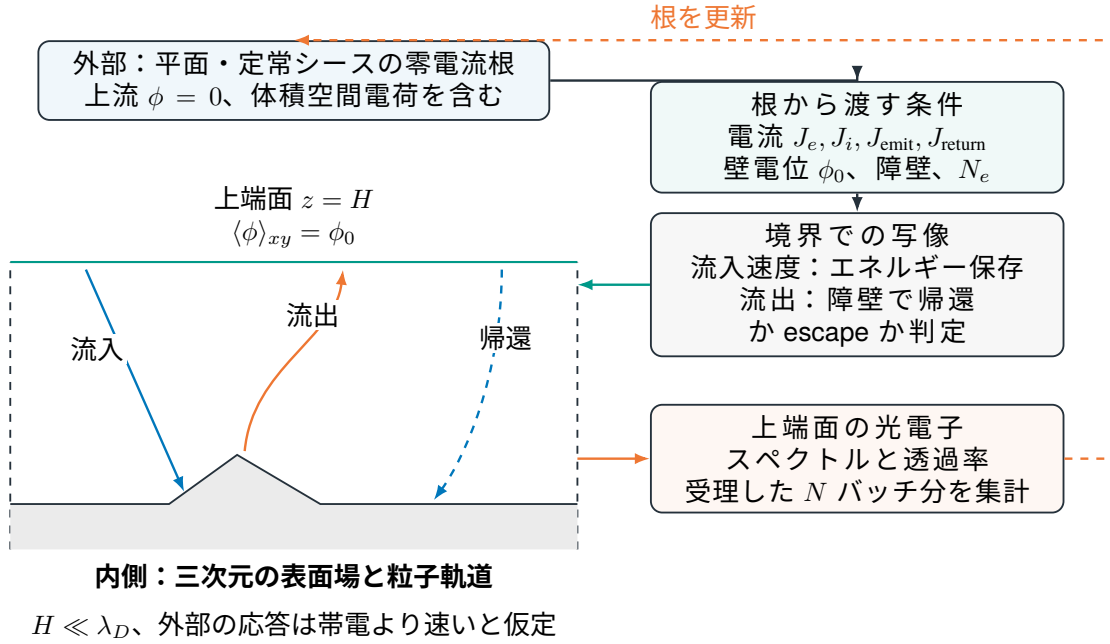


図 8.11: 外部シースを上端面の条件へ縮約する接続。両領域の長さ尺度は同じ縮尺ではない。内側では体積空間電荷を場に加えず、外部の飛行時間や折り返し位置は追わない。破線の帰還は境界での反射・再配置を示す。光電子の流出統計による根の更新は次のバッチから反映する。

吸収時の二次電子（6.5節）も、一部が上端面から出て外部シースの放出源に加わる。そこで光電子と二次電子を表面からの放出電子として一つの源にまとめ、外部シースのモデルには二次電子専用の項を加えずに、上端面を出る放出電子のスペクトルで光電子源を置き換える。

受理したバッチ N 個ごとに、上端面を外向きに横切った光電子と二次電子を、種類別に法線運動エネルギー ε の bin ($[0, 1 \text{ meV})$ と 1 meV から 1 keV までの対数 bin、1 桁に 24 個、 1 keV 以上は最後の bin) で数える。光電子の流出束は、透過率 $\eta = N_{\text{out}}/N_{\text{emit}}$ と設定した放出束から $\Gamma_{\text{pe,out}} = \eta \Gamma_{\text{emit}}$ とする。二次電子の流出束は、窓内の流出粒子の重みの和を参照面積 A と窓の時間幅 $\sum h$ で割った $\Gamma_{\text{see,out}} = \sum w_{\text{out}} / (A \sum h)$ とする。各スペクトルをそれぞれの束に規格化して bin ごとに足し (bin 内で $d\Gamma/d\varepsilon$ 一定)、平均法線エネルギーも束で重み付けして合わせる。この合算スペクトルを外部シースの放出源として零電流根を解き直し、新しい電流・障壁・壁電位・ N_e を次のバッチから使う。表面の光電子放出の目標 Γ_{emit} は変えない。スペクトルを平均エネルギーだけの半 Maxwell 分布に縮約しないのは、上端面のスペクトルが放出に近い本体とセル内で加速された裾を合わせた形になり、同じ平均の半 Maxwell 分布では障壁を越える電子と壁の近くの遅い電子の両方を誤って数えて根を失うことがあるためである。

二次電子の粒子種は固定電流 closure を使わずに完全に追跡する。外部根の escape 電流のうち光電子に割り当てる分は $s_{\text{pe}} = \Gamma_{\text{pe,out}} / (\Gamma_{\text{pe,out}} + \Gamma_{\text{see,out}})$ 倍とし、光電子の帰還の目標は escape と設定放出の差とする。この配分は暫定であり、追跡した二次電子の escape 電流と、外部根から二次電子に配分される escape 電流の差は零に拘束されない。この差は表面の電流収支に残るので、計算ごとに記録して評価する。初期根は光電子の表面放出（半 Maxwell 分布）だけで解き、光電子がない場合は放出源 0 の Type C から始める。二次電子は最初の更新から入る。

更新は前回の根を初期値にし、型を指定しない場合は前回の型を先に、次いで A、B、C の順に試す。根が見つからないか流出が 0 なら前回の根を保つ。更新の反復は無減衰の固定点反復であり、揺れの大きさは窓内の放出電子の標本数で決まる。平板の試験計算 (ray 300 本/バッチ、 $N = 2, 40$ バッチ) では、更新ごとの ϕ_0 は $2.34 \sim 2.94 \text{ V}$ の範囲で揺れ、標準偏差は 0.17 V で、発散や型の切り替わりはなかった。 N を長くするか ray 数を増やせば揺れは減る。 N は

表面の帯電の変化より十分短く選ぶ。定常状態だけを求める場合、到達する状態は N によらない。

8.9 適用範囲

本モデルは平面・定常・無衝突・非磁化のシースであり、曲率、時間変化、衝突、磁場による旋回、波動や不安定性による緩和を含まない。壁は完全に吸収し、二次電子放出、後方散乱、表面伝導を含まない。イオンは一定係数の圧力を持つ流体で、イオンの速度分布は定めない。上流は半無限で準中性とし、presheath や上流の加速機構とは結合しない。入射状態と電子の drift は固定した物理条件であり、根が見つからないときにそれらを自動で変更しない。

代数的な根の収束、物理的な電位分布の存在、動的な安定性は別の概念である。本モデルは前の二つを判定するが、複数の根の中から安定なものを選ぶ判定は含まない。根の探索と物理解の判定はどちらも有限の計算であり、見つからないことは解の不存在の証明ではない。

上端面への接続では、箱の外の電場、空間電荷、Debye 遮蔽、折り返し点までの距離や飛行時間は解かない。上端面での反射は、外部での往復を境界での反転に縮めた近似である。BEACH 側の一様磁場は 0 とする。外部根は外部シースの過渡や計算中に変わる照射とプラズマ条件には追従せず、外部根の更新が追従するのも、上端面を出る光電子と二次電子の変化だけである。二次電子の escape 電流の配分は暫定であり、配分と追跡の差が表面の電流収支に残る。

セル内で跳ね返されて上端面から出ていく太陽風の電子とイオンは外部根に入れず、外部根は壁に届いた粒子をすべて吸収とみなす。固定電流はこの分も吸収として表面に配るので総電流の釣り合いは保たれ、逃げる割合は固定電流の倍率の 1 からのずれで読める。光電子源の離散化は法線運動エネルギーの bin だけで、接線速度と表面上の位置の違いは外部シースに渡さない。受理した根は上流の帯の内側で理想化した電子分布に従わず、壁側の量の不確かさは数十 mV である (8.8.3 節)。これらの近似が結論を左右するケースでは、独立の運動論的計算や PIC と比較する。

第 9 章

検証、収束、再現性

9.1 計算の完了と科学的妥当性

計算が最後まで完了したことと、離散化が収束したこと、closure が適用できること、実環境を説明できることは別である。本章では、研究ケースで確かめるべき誤差を軸ごとに整理する。

9.2 誤差を支配する軸から検証する

誤差・近似	変える量	比較する目的量
表面の離散化	mesh 密度・形状品質	表面電位、局所密度、物体別電荷
場の遠方近似	Direct/FMM、 θ 、leaf の要素数	同じ保存電荷に対する ϕ, E
周期遠方場	画像層数、Ewald 分割、Fourier 和の参照	非零場の絶対誤差、零モードの Gauss 則
軌道と衝突	δt 、追跡上限	命中先、吸収・escape、軌道エネルギー
帯電の更新	h 、同じ累積物理時刻	電荷履歴、電流、定常分布
有限標本	重み・粒子数・ray 数・seed	平均、分散、低頻度の channel
外部 closure	型、 E_{floor} 、更新間隔 N	ϕ_0 、固定電流の倍率、場の不足

表 9.1: 研究ケースで切り分ける主な誤差。各軸を同時に変更すると原因を特定しにくい。

優先する軸は目的量によって異なる。光電子の再吸収先なら ray 標本と衝突幾何、弱い外部場との比較なら周期場の非零モードの絶対誤差、長時間の帯電ならバッチ幅と closure の固定点を先に調べる。全 parameter に同じ労力を割くより、結論を変え得る近似を重点的に検証する。

9.3 独立した参照解による基本検証

無場の直線運動、一様電場の等加速度運動、純磁場の速さ保存と旋回位相を確認する。滑らかな場では $\delta t, \delta t/2, \delta t/4$ で誤差比を測る。刻みを小さくしたときは、追跡上限の物理時間 $N_{\text{max}}\delta t$ を保つよう step 数の上限も変える。

場は解析的な sheet の跳び、有限 panel の独立な数値積分、同じ P0 mesh の Direct 和、上部真空の Fourier 和などと比較する。Direct と FMM の差は FMM の誤差を分離するが、共通の mesh 誤差は検出しない。零に近い基準場では相対誤差が発散するため、絶対誤差または代表場による規格化も使う。面上の評価点は片側極限の選び方で値が変わるので、手法の比較は面から離れた点で行う。

幾何では一つの三角形への既知の命中、複数要素の最初の交点、箱の面と mesh の発生順、周期画像への衝突を確認する。境界反射があるケースでは chord 時刻近似も含めて刻み収束を確認する。密な接触 geometry では表面の重なり、法線、極小間隔の影響を調べる。

9.4 電荷の収支と channel 別の監査

表面の総電荷増分は

$$Q^{n+1} - Q^n = Q_{\text{abs}} + Q_{\text{emit reaction}} + Q_{\text{closure}} \quad (9.1)$$

として確認する。導体再配分は各物体内で総電荷を保存するため、右辺へ新たな外部電流を加えない。開放系では外部から粒子が流入し外へ escape するので、表面だけの Q が保存される必要はない。閉じた光電子 channel、固定電流 channel、外部境界へ運ばれる電荷を別々に監査する。

軌道から得た吸収、目標電流に対応する電荷、実際に反映した補正電荷を区別して記録する。大きな正負の channel が相殺する場合、正味の残差だけでは標本不足を隠す。倍率、未解決率、各 channel の粒子数と絶対電荷を併せて確認する。

9.5 標本誤差と平衡判定

独立で有限分散の標本に対する Monte Carlo の平均誤差は通常 $N^{-1/2}$ の尺度を持つ。希少な escape、強い再重み付け、関連した更新の反復では、単純な標本数だけで有効精度を判断できない。粒子数や ray 数を増やす比較に加え、複数 seed の反復から主要量の分散を報告する。

バッチ幅を変えると粒子重みや整数化の端数も変わる場合がある。同じ最終バッチ番号より、同じ累積物理時刻で電荷履歴と電流を比べる。統計的な揺らぎがある平衡では、最後の一点ではなく時間窓の平均と分散を示す。電荷変化の監視量 r_q の小ささだけで平衡を宣言しない。

9.6 再現性のために記録する情報

計算結果を再現するには、ソフトウェアの版、完全な入力設定、表面 mesh、入力速度分布、乱数 seed、並列構成、コンパイラと最適化条件を記録する。周期遠方作用素は生成条件とともに記録する。途中から再開した計算では、再開前後で同じ物理条件が続いていることを確認する。並列集約の順序と乱数列が変わるため、並列構成を変えた計算にビット単位の一致は一般に期待できない。

第 10 章

研究への応用

10.1 物体間力と離脱の評価

保存した表面電荷から、対象物体の電荷を除いた場 $\mathbf{E}_{\text{other}}$ を評価すれば、重心求積による合力と torque は概念的に

$$\mathbf{F} \simeq \sum_{i \in \text{target}} q_i \mathbf{E}_{\text{other}}(\mathbf{c}_i), \quad (10.1)$$

$$\boldsymbol{\tau} \simeq \sum_{i \in \text{target}} (\mathbf{c}_i - \mathbf{x}_{\text{ref}}) \times q_i \mathbf{E}_{\text{other}}(\mathbf{c}_i) \quad (10.2)$$

となる。周期場では、対象物体自身の周期画像からの力を含めるかどうかを明示する。

鉛直経路の静電仕事 $W_e(z) = \int_{z_0}^z F_z(\zeta) d\zeta$ に対して、重力と付着を含む障壁は

$$\Delta U(z) = -W_e(z) + mg(z - z_0) + U_{\text{adh}}(z) \quad (10.3)$$

のように評価できる。初期位置で $F_z > mg$ でも、途中の付着・静電障壁を越えられるとは限らない。保存電荷を固定して評価する経路は、移動中の再帯電、周囲粒子の移動、接触の変化を解かない。その結果は離脱条件の診断であり、ダストの動的放出・飛翔量の予測とは区別する。

10.2 論文で明示すべき方法と限界

BEACH を用いた研究の手法節には、表面 geometry と要素分割、場の境界条件と評価法、粒子種の分布と重み、 δt と h 、追跡上限、表面モデル、外部 closure を記載する。2 軸周期場なら非零モードの評価法と零モードの closure を、外部シースなら型、 ϕ_0 と ϕ_m 、場の下限 E_{floor} 、外部根の更新間隔、固定電流の倍率を示す。これらは結果の再現と、モデルの適用性の判断に必要な情報である。

本モデルの適用限界には、内側体積空間電荷の省略、材料分極・伝導の省略、吸収中心の表面相互作用、固定 geometry、バッチ内固定場、外部帰還の即時境界縮約がある。計算量を減らすためにイオン質量を縮小した場合は、飛行時間、捕集、シース応答への影響を確かめる。各研究では、このうち結論に影響する近似を独立の計算や測定と照合する。例えば内側空間電荷の寄与を PIC と、外部の電位分布を kinetic 計算と、粒子放出の初期条件と付着力を実験または別の力学モデルと比較する。

新規性を主張する対象は、採用済みの Boris 法や FMM そのものではなく、実際に検証した物理的問い、モデル分担、あるいは得られた定量的知見である。本書の文献調査は選択した基礎・関連研究の確認であり、系統的レビューや網羅的な先行性調査ではない。

10.3 データと原稿作成に関する記載

データ利用可能性：本書は BEACH のソースコードと参考文献に基づく。第8章の数値例は手法の性質を示すための小規模な試験計算である。実際の研究論文へ展開する際は、設定、mesh、収束データの保存先と利用条件を著者が確定する。

研究倫理：本書は計算手法の技術解説であり、人体・動物・個人情報を対象にした研究を含まない。研究データを追加する際は、その研究に適用される倫理要件を改めて記載する。

著者貢献：著者・所属と CRediT に基づく貢献分担は未確定である。ソフトウェア開発、検証、原稿の確認と編集の担当を実際の貢献に従って記入する。

利益相反・研究費：情報が提供されていないため未記入である。「なし」と推定せず、公開・投稿時に著者が確定する。

AI 利用：この初稿は OpenAI Codex と Anthropic Claude による実装読解、文献の書誌確認、文章作成の支援を用いた。説明図の作図と解析式の図示には OpenAI Codex の支援を、外部ソースモデルの章の作成と数値例の計算・作図には Anthropic Claude の支援を用いた。著者による全文の科学的確認や、全引用文献の精読を完了した原稿ではない。公開・投稿前に、著者が数式、引用箇所、物理的解釈を確認し、対象媒体の方針に沿って開示文を確定する。

参考文献

- [1] John Amanatides and Andrew Woo. A fast voxel traversal algorithm for ray tracing. In *Eurographics '87*, pages 3–10, 1987.
- [2] Josh Barnes and Piet Hut. A hierarchical $O(n \log n)$ force-calculation algorithm. *Nature*, 324(6096): 446–449, 1986. doi: 10.1038/324446a0. URL <https://doi.org/10.1038/324446a0>.
- [3] R.D. Graglia. On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-d green's function or its gradient on a plane triangle. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 41(10):1448–1455, 1993. doi: 10.1109/8.247786. URL <https://doi.org/10.1109/8.247786>.
- [4] L Greengard and V Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, 73(2):325–348, 1987. doi: 10.1016/0021-9991(87)90140-9. URL [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(87\)90140-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90140-9).
- [5] Ralph L. Guernsey and Jerry H. M. Fu. Potential distribution surrounding a photo-emitting, plate in a dilute plasma. *Journal of Geophysical Research*, 75(16):3193–3199, 1970. doi: 10.1029/JA075i016p03193. URL <https://doi.org/10.1029/JA075i016p03193>.
- [6] M. Horányi, J. R. Szalay, S. Kempf, J. Schmidt, E. Grün, R. Srama, and Z. Sternovsky. A permanent, asymmetric dust cloud around the moon. *Nature*, 522(7556):324–326, 2015. doi: 10.1038/nature14479. URL <https://doi.org/10.1038/nature14479>.
- [7] Dag Lindbo and Anna-Karin Tornberg. Fast and spectrally accurate ewald summation for 2-periodic electrostatic systems. *The Journal of Chemical Physics*, 136(16):164111, 2012. doi: 10.1063/1.4704177. URL <https://doi.org/10.1063/1.4704177>.
- [8] R. Marchand, Y. Miyake, H. Usui, J. Deca, G. Lapenta, J. C. Matéo-Vélez, R. E. Ergun, A. Sturmer, V. Génot, A. Hilgers, and S. Markidis. Cross-comparison of spacecraft-environment interaction model predictions applied to Solar Probe Plus near perihelion. *Physics of Plasmas*, 21(6):062901, 2014. doi: 10.1063/1.4882439. URL <https://doi.org/10.1063/1.4882439>.
- [9] Tomas Möller and Ben Trumbore. Fast, minimum storage ray-triangle intersection. *Journal of Graphics Tools*, 2(1):21–28, 1997. doi: 10.1080/10867651.1997.10487468. URL <https://doi.org/10.1080/10867651.1997.10487468>.
- [10] Tore Nitter, Ove Havnes, and Frank Melandsø. Levitation and dynamics of charged dust in the photo-electron sheath above surfaces in space. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 103(A4): 6605–6620, 1998. doi: 10.1029/97JA03523. URL <https://doi.org/10.1029/97JA03523>.
- [11] Oliver Penrose. Electrostatic instabilities of a uniform non-maxwellian plasma. *The Physics of Fluids*, 3(2):258–265, 1960. doi: 10.1063/1.1706024. URL <https://doi.org/10.1063/1.1706024>.
- [12] Andrew Poppe and Mihály Horányi. Simulations of the photoelectron sheath and dust levitation on the lunar surface. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 115(A8), 2010. doi: 10.1029/2010JA015286. URL <https://doi.org/10.1029/2010JA015286>. Article 2010JA015286.

- [13] Hong Qin, Shuangxi Zhang, Jianyuan Xiao, Jian Liu, Yajuan Sun, and William M. Tang. Why is boris algorithm so good? *Physics of Plasmas*, 20(8):084503, 2013. doi: 10.1063/1.4818428. URL <https://doi.org/10.1063/1.4818428>.
- [14] K.-U. Riemann. The bohmer criterion and sheath formation. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 24(4):493–518, 1991. doi: 10.1088/0022-3727/24/4/001. URL <https://doi.org/10.1088/0022-3727/24/4/001>.
- [15] Trinesh Sana and S K Mishra. Plasma sheath around sunlit moon: monotonic and non-monotonic structures. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 520(1):233–246, 2023. doi: 10.1093/mnras/stad155. URL <https://doi.org/10.1093/mnras/stad155>.
- [16] Trinesh Sana and Sanjay K. Mishra. Effect of ion temperature on lunar photoelectron sheath. *arXiv preprint*, 2026. doi: 10.48550/arXiv.2608.19926. URL <https://arxiv.org/abs/2608.19926>. arXiv:2608.19926 [physics.plasm-ph].
- [17] Timothy J. Stubbs, Richard R. Vondrak, and William M. Farrell. A dynamic fountain model for lunar dust. *Advances in Space Research*, 37(1):59–66, 2006. doi: 10.1016/j.asr.2005.04.048. URL <https://doi.org/10.1016/j.asr.2005.04.048>.
- [18] A. Van Oosterom and J. Strackee. The solid angle of a plane triangle. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, BME-30(2):125–126, 1983. doi: 10.1109/TBME.1983.325207. URL <https://doi.org/10.1109/TBME.1983.325207>.
- [19] E C Whipple. Potentials of surfaces in space. *Reports on Progress in Physics*, 44(11):1197–1250, 1981. doi: 10.1088/0034-4885/44/11/002. URL <https://doi.org/10.1088/0034-4885/44/11/002>.
- [20] D. Wilton, S. Rao, A. Glisson, D. Schaubert, O. Al-Bundak, and C. Butler. Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 32(3):276–281, 1984. doi: 10.1109/TAP.1984.1143304. URL <https://doi.org/10.1109/TAP.1984.1143304>.
- [21] Jianxun Zhao, Xinpeng Wei, Zhangli Hu, Xiaoming He, Daoru Han, Zhen Hu, and Xiaoping Du. Photoelectron sheath near the lunar surface: Fully kinetic modeling and uncertainty quantification analysis. In *AIAA Scitech 2020 Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2020. doi: 10.2514/6.2020-1548. URL <https://doi.org/10.2514/6.2020-1548>. Paper 2020-1548.
- [22] M. I. Zimmerman, W. M. Farrell, C. M. Hartzell, X. Wang, M. Horanyi, D. M. Hurley, and K. Hibbitts. Grain-scale supercharging and breakdown on airless regoliths. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 121(10):2150–2165, 2016. doi: 10.1002/2016je005049. URL <https://doi.org/10.1002/2016je005049>.